题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、严格表述题（每题 3 分，共 4 题 ，共 12 分）

1. 函数极限“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$”不成立。

2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微分。

3. 函数 $y=f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

4. 关于反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的柯西收敛原理

二、填空题（每题 4 分，共 6 题，共 24 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n} x =$ ________，其中x是给定的任意实数。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^8+1)\ln(1+5x\sin(2x^2))}{(e^{2x}-1)\cos 8x\tan^2 x} =$ ________。

3. 假设隐函数方程$e^{xy}-y\sin(x-1)=\cos 2(x-1)$所确定的函数是$y=y(x)$，则其导函数在点$x=1$的值$y'(1)=$ ________。

4. $y=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$，$y^{(n)}=$ ________________________。

5. 设$f(x)=\int_{x^2}^{e^x}\sin(u^2)du$，则$f'(x)=$ ________________________。

6. 设n是自然数，则$\int_0^1(\ln\dfrac{1}{x})^n dx=$ ________。

三、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果正确的，请回答“是”，并给予简要证明；如果错误的，请回答“否”，并给出反例与简单的说明。答“是或否”2分，证明或举反例并说明4分）（每题6分，共4题，共24分）

1. 假设$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，若$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n}$不存在，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$也不存在。

2. 有限开区间(a,b)上的两个一致连续函数$f(x)$与$g(x)$的乘积必是此区间上的一致连续函数。

3. 若 $f'_-(x_0)<0$，$f'_+(x_0)>0$，则存在 x_0 的一个 δ - 邻域 $O(x_0,\delta)=(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$ 使得 $f(x)\le f(x_0)$，对于 $\forall x_0\in O(x_0,\delta)$ 成立。

4. 假设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 也收敛。

四、计算题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

1. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

2. 求：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$

3. 假设 $y=(x+1)^4+e^x$，请计算保凸区间（上凸或者下凸区间）及拐点。

4. 已知隐函数方程 $\tan(x+y)-y=0$，求 dy, d^2y。

5. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx$

6. 对于实参数 p，讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 的敛散性（绝对收敛、条件收敛、发散）。

五、证明题（共两题，10 分）

1. 假设函数 f 在有限闭区间 $[a,b]$ 上黎曼可积，且在点 x_0 连续，其中 $x_0 \in (a,b)$，令 $F(x)=\int_a^x f(u)du$，证明：$F(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$。（5 分）

2. 假设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上具有三阶连续导数，$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$，$0<\theta<1$，$x,x+h\in(a,b)$，且 θ 与 h 无关，证明：在开区间 (a,b) 上 $f'''(x)\equiv 0$。（5 分）