复旦大学数学科学学院

2018～2019学年第一学期期末考试试卷

□ A 卷　　□ B 卷

课程名称： 数学分析 AI　　**课程代码：** MATH120014

开课院系： 数学科学学院　　**考试形式：** 闭卷

姓　名： ________　　**学　号：** ________　　**专　业：** ________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　目	1	2	3	4	5	6	7	总分
得　分								

（装订线内不要答题）

一 **(30 分)**、 填空题(每题 5 分):

(1) 设 $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $f(0)=a$. 则 $f(x)$ 有三个不同的实零点的充分必要条件是 a 满足 ________.

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{xe^x+1}\,dx=$ ________.

(3) 设光滑函数 $y=y(x)$ 满足 $x=\sqrt{y-\ln(1+y)}\,\mathrm{sgn}\,(y)$. 则 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的带 Peano 型余项的二阶 Taylor 展式为: ________.

(4) 设 $x_0\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n-x_n^5$ $(n\geq 0)$. 若 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x_n=\beta\in(0,+\infty)$, 则 $\alpha=$ ________.

(5) 平面直角坐标系中椭圆 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ 在点 $P(\sqrt{5},\frac{8\sqrt{5}}{5})$ 处的法线的斜率为 ________.

(6) 设 $\mathbb{R}$ 上函数 $f(x)$ 任意次可导, 满足 $f''(x)+f(x)=x^{2017}e^{2018x}$, 且 $f(0)=1$, $f'(0)=0$. 则 $f^{(2019)}(0)=$ ________.

二 **(10 分)**、 设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续, 在 $(-1,1)$ 内三阶可导. 证明: 存在 $\xi \in (-1,1)$ 使得 $f'''(\xi) = 3\Big(f(1) - f(-1) - 2f'(0)\Big)$.

三 (10 分)、 设 $y = y(x)$ 满足 $e^y + y - x = 0$. 试计算 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 以及 $\displaystyle\int xy(x)\,dx$.

四 (15 分)、 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的二阶导数连续, 满足如下条件: (1) 任何直线与其图像至多有两个交点; (2) 若直线 $y = ax + b$ 与 $y = f(x)$ 有两个交点, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = +\infty$. 证明: (1) $f''(x) \geq 0$; (2) 在任何区间 (α, β) 上, $f''(x) \not\equiv 0$.

五 (10 分)、 设 $y = \ln \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, 试讨论该函数的单调性、极值、凸性、拐点, 求出它的渐近线, 并作出它的简图.

六 (10 分)、 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界可微函数, 且对任何 x 均有 $|f'(x)| < 1$. 证明存在 $M < 1$ 使得对任何 $x \in \mathbb{R}$ 成立 $|f(x) - f(0)| \leq M|x|$.

七 (15 分)、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有两阶导数, 满足 $f(a)=f(b)=0$. 证明: 若在 (a,b) 内成立以下条件之一, 则在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\le 0$:

(1) $f''(x)-f(x)\ge 0$;　(2) $f''(x)-4f'(x)+4f(x)\ge 0$;　(3) $f''(x)+4f'(x)+f(x)\ge 0$.