（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学类

2022-2023 学年第一学期《数学分析 B（I)》

一元微积分（综合性）阶段性考试 试卷（在线考试）

第 1-6 页（在答题纸上解答）

课程代码：MATH120016.10-11　　考试形式：☐开卷　☑闭卷　　2022 年 12 月 25 日

（本次考试计划时间 180 分钟）

专业＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿

1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	1-8		
2-1-1	2-1-2	2-2-1	2-2-2	2-3-1	2-3-2	2-3-3	2-3-4	2-4-1	2-4-2
2-5	2-6-1	2-6-2	3-1	3-2-1	3-2-2	3-3			总分

注：各部分题目的每一题与小题都按满分 10 分计算，然后折合成总分 100 分。

第一部分 概述与方法说明

（1）阐述：函数在一点可微的定义

（2）阐述：函数在闭区间上 Riemann 可积的定义

（3）阐述并证明：函数在区间上一致连续的充分必要性结论

（4）已知 Monge 曲线的曲率计算式为 $\kappa(x)=\dfrac{|y''(x)|}{\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，推导：一般参数形式下曲率的计算式

（5）判断：设有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调且有界，则 $f(x)$ 在闭区间中的任意一点都存在单侧极限。

（6）判断：设有 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微且一致连续，则其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 上有界.

（7）判断：设有函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上可微，且 $\exists\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=\infty$。

（8）判断：设有 $f(x)$ 是在 $\mathbb{R}$ 上有定义的以 T 为周期的函数，且有 $\int_0^T f(x)dx=0$，广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{f(x)}{\ln^{\mu}x}dx=0$， $\forall\mu\in\mathbb{R}^+$ 是否收敛？

（装订线内不要答题）

第二部分 计算与计算证明

1. 无限小分析方法

（1）当 $x \to 0+0$，$x^2+\alpha(1-\cos x)+\beta\ln\dfrac{\sin x}{x}$ 最高为几阶无穷小量？这时 α、β 为多少？

（2）求 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 在 $x=0$ 的 n 阶无限小展开

2. 极限与导数

（1）$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k)\cdot(na+k+1)}}{n^2}\quad (a>0)$

（2）求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的所有不可微的点，需说明理由

3. 积分计算

（1）求不定积分：$\displaystyle\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

（2）求广义积分：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

（3）求广义积分：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-1}{\left(1+x^2\right)\cdot(1+x)}dx$

（4）求由心脏线 $r=1+\cos\theta$，$\theta\in[0,2\pi]$ 所围成的平面区域的面积。

4. 积分估计 （1）证明: $\int_0^1\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^n dx > \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$， $\forall n\in\mathbb{N}$;

(2) 求极限： $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\int_0^1\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^n dx\right]^{\frac{1}{n}}$.

5. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^{\alpha}\cdot\ln\left(1+x^{\beta}\right)}{x^{\gamma}}dx$， α、$\beta\in\mathbb{R}^+$， $\gamma\in\mathbb{R}^+$需明确绝对收敛、条件收敛、发散的参数范围

6. 常微分方程相关 （1）设有 $f(x)\in(-1,+\infty)$满足

$$f(x)\cdot\left[\int_0^x f(t)dt+1\right]=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$$

，求 $f(x)$的不表达式

（2）求解微分方程：$(x-2)\cdot\frac{dy}{dx}(x)+y(x)=2(x-2)^2$

（装订线内不要答题）

第三部分 分析与证明

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上三阶可导，且 $f'(0)=f''(0)=0$， $f^{(3)}(0)\neq 0$，考虑 $\int_0^x f(t)dt=f(\xi(x))\cdot x$，确定：当 $x\to 0+0$， $\xi(x)=Cx^{\mu}(1+o(1))$ 中的常数 $C\neq 0$ 与 $\mu\in\mathbb{R}^+$

（2）积分不等式 （a）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $0<f'(x)<1$， $f(0)=0$，证明：$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2>\int_0^x f^3(t)dt$， $\forall x\in(0,1]$.（b）设 $f(x)\in C^1[a,b]$，且 $f(a)=0$，证明：$\int_a^b f^2(x)dx\leq\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\int_a^b|f'(x)|^2dx$

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$， $\int_0^1 xf(x)dx=1$，证明：$\exists\xi\in[0,1]$，使得 $|f(\xi)|=4$。