（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学类

2022-2023 学年第一学期《数学分析 B（I)》

一元积分学阶段性考试 试卷（在线考试） 参考解答

第 1-6 页（在答题纸上解答）

课程代码：MATH120016.10-11　　考试形式：☐开卷　☑闭卷　　2022 年 12 月 18 日

（本次考试计划时间 180 分钟）

专业＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿

1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	1-8	1-9	
2-1-1	2-1-2	2-2-1	2-2-2	2-3-1	2-3-2	2-4	2-5	2-6-1	2-6-2
3-1-1	3-1-2	3-1-3	3-2-1	3-2-2					总分

注：各部分题目的每一题与小题都按满分 10 分计算，然后折合成总分 100 分。

第一部分 概述与方法说明

（1）证明：Riemann 可积的振幅和判别法与 Riemann 判别法的等价性。

$$\Omega(f;P)=\sum_{\alpha=1}^{N}\omega\left(f;[x_{\alpha-1},x_\alpha]\right)\Delta x_\alpha$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\omega(f;[x_{\alpha-1},x_\alpha])>\lambda}\omega\left(f;[x_{\alpha-1},x_\alpha]\right)\Delta x_\alpha \ \sim\ \omega\left(f;[a,b]\right)\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta x_\alpha\\ \displaystyle\sum_{\omega(f;[x_{\alpha-1},x_\alpha])\le\lambda}\omega\left(f;[x_{\alpha-1},x_\alpha]\right)\Delta x_\alpha \ \sim\ \le\lambda(b-a)\end{cases}$$

基于上述结构：

如有 $\omega\left(f;[x_{\alpha-1},x_\alpha]\right)<\mu,\ \forall|P|<\delta_{\lambda,\mu}$，则有振幅和判别法；

反之，由振幅和判别法，可得 Riemann判别法

（2）设有 $f(x)\in C[a,b]$，满足 $\begin{cases} f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a,b]; \\ \int_a^b f(x)dx=0, \end{cases}$ 证明：$f(x)\equiv 0,\ \forall x\in[a,b]$

分析：反证法：

设有 $f(x_0)\neq 0, \exists \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\int_{x_0-\delta_\varepsilon}^{x_0+\delta_\varepsilon} f(x)dx>(f(x_0)-\varepsilon)2\delta_\varepsilon,$

其中$(f(x_0)-\varepsilon)2\delta_\varepsilon$不能到0，故矛盾

（3）设有 $f(x)\in C[a,b]$，考虑 $F(x):=\int_a^x f(t)dt,\ \forall x\in[a,b]$,

证明：$\exists\frac{dF}{dx}(x)=f(x),\ \forall x\in[a,b]$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\left(\int_a^{x+\Delta x}-\int_a^x\right)f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$$
$$=f(x+\theta\Delta x)\Delta x=\big(f(x)+o(1)\big)\cdot\Delta x=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

即$\exists\frac{dF}{dx}(x)=f(x),\ \forall x\in[a,b]$

（4）设有 $f(x)\in C[a,b]$，考虑 $F(x):=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)dt,\ \forall x\in[a,b]$, $\psi(x)$、$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，计算：$\frac{d}{dx}F(x)$，需说明理由

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)dt\overset{Leibniz性}{=}G(\psi(x))-G(\varphi(x))$$

根据链式求导法则，有$F'(x)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$

（5）设有 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上**一致连续**，且 $\exists\int_a^{+\infty}f(x)dx\in\mathbb{R}$，证明：$\exists\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

反证法，假设不存在 $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$, 会有$\exists\varepsilon_*>0,\forall x_m$

过了阈值之后，会存在x_δ使得$f(x_\delta)\ge\varepsilon_*$,积分无法控制在无穷小量，反常积分不收敛

（装订线内不要答题）

(6)判断：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}, & x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right] \\ C, & x=0\end{cases}$ C 为常数，是否在$[0,1]$上常义 Riemann 可积；

广义积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}dx$ 是否收敛

1. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=-\infty$,有$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上无界，所以非常义Riemann可积

2. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}dx,\ \ x_*=0,|f(x)|\le\frac{C}{\sqrt{x}}$,所以广义积分(绝对)收敛

（7）阐述并证明：积分第一中值定理 注：按推导形式写出

$$\inf_{[a,b]} f(x)\varphi(x)\le f(x)\varphi(x)\le\sup_{[a,b]} f(x)\varphi(x),\forall x\in[a,b]$$

$$\inf_{[a,b]} f(x)\int_a^b\varphi(x)dx\le\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\le\sup_{[a,b]} f(x)\int_a^b\varphi(x)dx,\forall x\in[a,b]$$

设定$f(x)\in C[a,b]$,有$\exists x_*\in[a,b],s.t$

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(x_*)\int_a^b\varphi(x)dx$$

（8）阐述并证明：积分形式的 Jensen 不等式 注：按推导形式写出

数型

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\le\alpha_1\cdot f(x_1)+\cdots+\alpha_n\cdot f(x_n),\alpha_1+...+\alpha_n=1$$

积分型

$$f\left(\frac{\int_a^b\varphi(t)\theta(t)dt}{\int_a^b\theta(t)dt}\right)\le\frac{\int_a^b f\circ\varphi(t)\theta(t)dt}{\int_a^b\theta(t)dt}$$

基于对部分和，利用数型Jensen不等式

$$f\left(\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\varphi(\xi_\alpha)\theta(\xi_\alpha)\Delta t_\alpha}{\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\theta(\xi_\alpha)\Delta t_\alpha}\right)\le\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{N}f\circ\varphi(\xi_\alpha)\theta(\xi_\alpha)\Delta t_\alpha}{\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\theta(\xi_\alpha)\Delta t_\alpha}$$

（9）设有平面参数曲线 $[a,b]\ni t\mapsto\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ 为 x 轴的上方的简单封闭曲线 C，写出：

（a）C 绕 x 轴旋转一周所形成的旋成体的侧面积、体积的计算式；（b）C 所围成的平面区域的面积

$$S_{侧}=\int_a^b 2\pi y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}(t)dt$$

$$V=\left|\int_a^b \pi y^2(t)\dot{x}(t)dt\right|$$

$$S=\left|\int_a^b y(t)\dot{x}(t)dt\right|$$

第二部分 计算与计算证明

1. 计算数列极限

（1） $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x^3}\int_0^{x^2}t^{1+t}dt$

分析：

$\int_0^{x^2}t^{1+t}dt$

$f(t)=t^{1+t}=te^{t\ln t}\to0.as\ t\to0+0$

有 $\dfrac{\int_0^{x^2}t^{1+t}dt}{x^3}$, 为 $\dfrac{0}{0}$ 型

$$\sim\frac{x^2\cdot\left(x^2\right)^{x^2}\cdot2x}{3x^2}=\frac{2}{3}xe^{x^2\ln x^2}\to0,as\ x\to0+0.$$

（2） $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\sqrt{n}}\right)$

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+\sqrt{1}}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\sqrt{n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\sqrt{k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}},其中\frac{\sqrt{k}}{n}为小量$$

$$2^{\frac{k}{n}}\left(1+o(1)\right)\to\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln2}2^x\Big|_0^1=\frac{1}{\ln2},as\ n\to+\infty.$$

（装订线内不要答题）

2. 计算定积分

（1） $\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \cos^{2022} x}{\sin^{2022} x + \cos^{2022} x} dx$

$$= \int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \frac{\cos^{2022} x}{\sin^{2022} x + \cos^{2022} x} dx$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2022} x}{\sin^{2022} x + \cos^{2022} x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

（2） $f(x) \in R[-a,a]$ 且为偶函数，$a>0$，证明：$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx$

$$\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a \frac{f(-x)}{1+e^{-x}} dx = \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^{-x}} dx$$

有 $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} \right) dx = \int_0^a f(x) dx$

其中 $\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = 1$

3. 计算广义积分

（1） $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

$$= -\int_1^{+\infty} \frac{d\frac{1}{x}}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_1^0 \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\sqrt{1-y^2}}{\frac{1}{2}} \right|_0^1 = 1$$

（2） $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx$.

处理一：$x = a\tan\theta\,(a>0)$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(a\tan\theta)}{a^2\sec^2\theta} a\sec\theta d\theta = \frac{1}{a}\ln a \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\tan\theta d\theta$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}\ln 2$，有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\tan\theta d\theta = 0$，所以 $I = \frac{1}{a}\ln a \cdot \frac{\pi}{2}$

处理二：

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_{+\infty}^1 \frac{\ln\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+a^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = -\int_0^1 \frac{\ln y}{y^2+a^2}dy$$

4. 设有 $f(x)\in C^2[0,1]$，证明：$\exists\theta\in[0,1]$，满足 $\int_0^1 f(x)dx = f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{6}f''(\theta)$

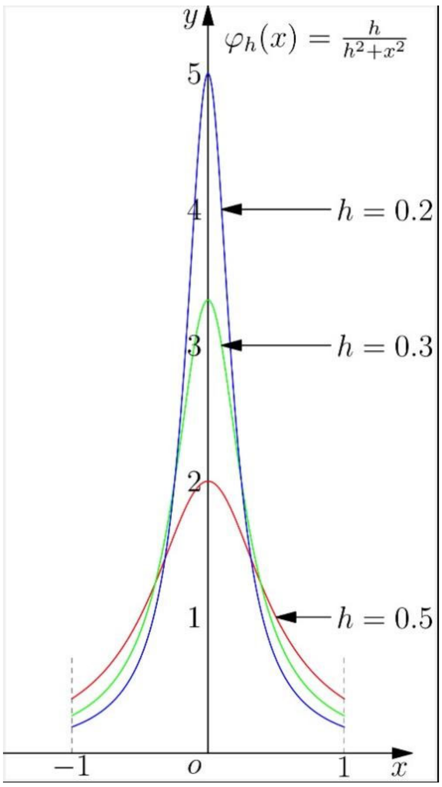
$$\int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)d(1-x) = f(0)+\int_0^1(1-x)f'(x)dx$$

$$= f(0)-\int_0^1 f'(x)d\frac{(1-x)^2}{2} = f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\int_0^1\frac{1(1-x)^2}{2}f''(x)dx$$

其中 $\int_0^1\frac{1(1-x)^2}{2}f''(x)dx = f''(\theta)\left[-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}f''(\theta)$

5. 积分估计 设有 $I_h := \int_{-1}^1 f(x)\varphi_h(x)dx$，$\begin{cases} f(x)\in C[-1,1] \\ \varphi_h(x)=\dfrac{h}{h^2+x^2}\end{cases}$，研究极限：$\exists\lim\limits_{h\to+0} I_n$.

附图：



$$\int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon} f(x)\phi_h(x)dx = f(x_{\delta_\varepsilon})\int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon}\phi_h(x)dx$$

其中 $|f(x_{\delta_\varepsilon})-f(0)|<\varepsilon$

$$\int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon}\phi_h(x)dx=\int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon}\frac{h}{h^2+x^2}dx=\int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon}\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{h^2}}d\left(\frac{x}{h}\right)$$

$$=2\arctan\frac{x}{h}\Big|_0^{\delta_\varepsilon}=2\arctan\frac{\delta_\varepsilon}{h}\to\pi, as\ \mathrm{h}\to 0+0$$

$$\left|\int_{\delta_\varepsilon}^{1} f(x)\varphi_h(x)dx\right|\le\int_{\delta_\varepsilon}^{1}|f(x)|\frac{h}{h^2+x^2}dx\le\sup_{[-1,1]}|f(x)|\frac{h}{h^2+\delta_\varepsilon{}^2}(1-\delta_\varepsilon)\to 0, as\ \mathrm{h}\to 0+0$$

6. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\sin\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)\cdot\ln\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)dx$，$\mu\in\mathbb{R}^+$，需明确绝对收敛、条件收敛、发散的参数范围

考虑变换 $y=x^\mu+\frac{1}{x^\mu}$，有

$$\frac{dy}{dx}(x)=\mu x^{\mu-1}-\mu x^{-\mu-1}=\mu\cdot x^{-1}\cdot\left(x^\mu-x^{-\mu}\right)=\mu\cdot x^{-1-\mu}\cdot\left(x^{2\mu}-1\right)$$

有 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}(x)>0,\ \forall x>1\\ \dfrac{dy}{dx}(x)<0,\ \forall x\in(0,1).\end{cases}$

(i) $x\in(0,1]$, $y\in[2,+\infty)$.

$x^\mu-yx^\mu+1=0$, $x^\mu=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$， 取 $x^\mu=\dfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

$$\int_0^1\sin\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)\cdot\ln\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)dx=\int_{+\infty}^{2}\sin y\cdot\ln y\frac{dx}{dy}(y)dy,$$

$$x^\mu=\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4}\right)=\frac{y}{2}\left[1-\left(1-\frac{4}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{y}{2}\cdot\left[\frac{2}{y^2}+O\left(\frac{1}{y^4}\right)\right]=\frac{1}{y}\left(1+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right)$$

$$\mu\cdot x^{\mu-1}\frac{dx}{dy}(y)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\right)=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{4}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{y^2}+O\left(\frac{1}{y^4}\right)\right]=-\frac{1}{y^2}\left(1+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right)$$

则有 $\dfrac{dx}{dy}(y)=-\dfrac{1/\mu}{x^{\mu-1}}\cdot\dfrac{1}{y^2}\left(1+O\left(\dfrac{1}{y^2}\right)\right)=\dfrac{-1/\mu}{y^{1+\frac{1}{\mu}}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{y^2}\right)\right),$

故有 $\displaystyle\int_{+\infty}^{2}\sin y\cdot\ln y\frac{dx}{dy}(y)dy=\frac{1}{\mu}\int_{2}^{+\infty}\sin y\cdot\ln y\frac{1}{y^{1+\frac{1}{\mu}}}\left(1+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right)dy$

$\displaystyle\int_{+\infty}^{2}\sin y\cdot\frac{\ln y}{y^{1+\frac{1}{\mu}}}dy,\ \forall\mu>0,$ 绝对收敛

(ii) $x\in[1,+\infty),y\in[2,+\infty).$

$$x^{\mu}=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}=\frac{1}{2}y\cdot\left[1+\left(1-\frac{4}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}y\cdot\left[2-\frac{2}{y^2}+O\left(\frac{1}{y^4}\right)\right]=y\left(1+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right),\ as\ y\to+\infty$$

$$\mu\cdot x^{\mu-1}\cdot\frac{dx}{dy}(y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[1+\left(1-\frac{4}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}\left[2+\frac{2}{y^2}+O\left(\frac{1}{y^4}\right)\right]=1+O\left(\frac{1}{y^2}\right),$$

则有 $\dfrac{dx}{dy}(y)=\dfrac{1/\mu}{x^{\mu-1}}\cdot\left(1+O\left(\dfrac{1}{y^2}\right)\right)=\dfrac{1/\mu}{y^{\frac{\mu-1}{\mu}}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{y^2}\right)\right)=\dfrac{1/\mu}{y^{1-\frac{1}{\mu}}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{y^2}\right)\right)$

故有 $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\sin y\cdot\ln y\frac{dx}{dy}(y)dy=\frac{1}{\mu}\int_{2}^{+\infty}\sin y\cdot\ln y\frac{1/\mu}{y^{1-\frac{1}{\mu}}}\left(1+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right)dy$

$$\begin{cases}\text{当 } 1-\dfrac{1}{\mu}\le 0,\text{ 即 } 0<\mu\le 1 \text{ 时，发散}\\ \text{当 } 0<1-\dfrac{1}{\mu}\le 1,\text{ 即 } \mu>1 \text{ 时，条件收敛}\end{cases}$$

第三部分 分析与证明

（1）为了证明积分第二中值定理的结构，指 $\exists x_*\in[a,b]$，满足

$\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot\eta(x)dx=\eta(b)\cdot\int_{x_*}^{b}f(x)dx$，式中$\begin{cases}f(x)\in R[a,b];\\ \eta(x)\text{在}[a,b]\text{上单调上升且非负}.\end{cases}$

(a) 考虑$[a,b]$上分割P_n对应的$I_n:=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\cdot\eta(x_k)dx$，证明：$|I-I_n|\to 0$，当

（装订线内不要答题）

$n\to+\infty$, 对应 $|P_n|\to 0$, 式中 $I:=\int_a^b f(x)\cdot\eta(x)dx$.

(b) 引入 $G(x):=\eta(b)\cdot\int_x^b f(t)dt$，$\forall x\in[a,b]$，证明：$\inf\limits_{[a,b]} G(x)\le I_n\le \sup\limits_{[a,b]} G(x)$，$\forall n\in\mathbb{N}$

(c) 证明:积分第二中值定理的上述结构.

分析：$G(x):=\eta(b)\cdot\int_x^b f(t)dt$, 如有 $\int_a^b \eta(x)f(x)dx\sim\begin{cases}\le\sup\limits_{[a,b]}G(x)\\ \ge\inf\limits_{[a,b]}G(x)\end{cases}$, 则可获证.

构造 $I_n=\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} f(x)\eta(x_\alpha)dx,\ I_n\sim\begin{cases}\le\sup\limits_{[a,b]}G(x)\\ \ge\inf\limits_{[a,b]}G(x)\end{cases},\ \forall n\in\mathbb{N}$

$P_n: a=x_0<x_1<\ldots<x_{\alpha-1}<x_\alpha<\ldots<x_{N_n-1}<x_{N_n}=b,\ |P_n|\to 0,\ as\ n\to+\infty$

估计:

(1) $\int_a^b f(x)\eta(x)dx-\sum\limits_{\alpha=1}^{N_n}\int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} f(x)\eta(x_\alpha)dx=\sum\limits_{\alpha=1}^{N_n}\int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} f(x)\big(\eta(x)-\eta(x_\alpha)\big)dx$

有 $\left|\int_a^b f(x)\eta(x)dx-I_n\right|\le\sup\limits_{[a,b]}|f(x)|\Omega(\eta(x);P_n)\to 0,\ as\ n\to+\infty$

(2)

$$\sum_{\alpha=1}^{N_n}\int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} f(x)\eta(x_\alpha)dx=\sum_{\alpha=1}^{N_n}(F(x_{\alpha-1})-F(x_\alpha))\eta(x_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{N_n}F(x_{\alpha-1})\eta(x_\alpha)-\sum_{\alpha=1}^{N_n}F(x_\alpha)\eta(x_\alpha)$$

其中 $\sum\limits_{\alpha=1}^{N_n}F(x_{\alpha-1})\eta(x_\alpha)=\sum\limits_{\alpha=0}^{N_n-1}F(x_\alpha)\eta(x_{\alpha+1}),\ \sum\limits_{\alpha=1}^{N_n}F(x_\alpha)\eta(x_\alpha)=\sum\limits_{\alpha=1}^{N_n-1}F(x_\alpha)\eta(x_\alpha),$

则有

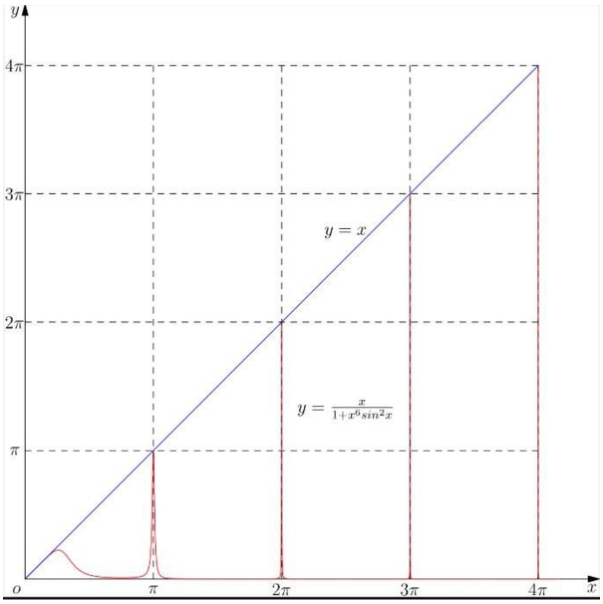
$$\sum_{\alpha=1}^{N_n}\int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} f(x)\eta(x_\alpha)dx=\sum_{\alpha=0}^{N_n-1}F(x_\alpha)\eta(x_{\alpha+1})-\sum_{\alpha=1}^{N_n-1}F(x_\alpha)\eta(x_\alpha)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N_n-1}F(x_\alpha)\left[\eta(x_{\alpha+1})-\eta(x_\alpha)\right]+F(x_0)\eta(x_1)\sim\begin{cases}\le\sup\limits_{[a,b]}F(x)\cdot\eta(b)\\ \ge\inf\limits_{[a,b]}F(x)\cdot\eta(b)\end{cases}$$

（2）研究广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^2}dx,\ p,q>0$ 的敛散性

(a) 确定上述广义积分收敛与发散所对应的 $\{p,q\}$ 的范围，仅需给出相关关系;

附图：



$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^p}{1+x^q\left|\sin x\right|^2}dx\sim\begin{cases}\le\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\pi^p\left(k+1\right)^p}{1+\pi^q k^q\left|\sin x\right|^2}dx=\pi^p\left(k+1\right)^p\cdot\int_0^\pi\frac{dx}{1+\pi^q k^q\left|\sin x\right|^2}\\ \ge\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\pi^p k^p}{1+\pi^q\left(k+1\right)^q\left|\sin x\right|^2}dx=\pi^p k^p\cdot\int_0^\pi\frac{dx}{1+\pi^q\left(k+1\right)^q\left|\sin x\right|^2}\end{cases}$$

计算 $\int_0^\pi\frac{dx}{1+A\left|\sin x\right|^2}\left(A>1\right)$

$$=2\int_0^\pi\frac{dx}{1+A\cos^2 x}=2\int_0^\pi\frac{\sec^2 x dx}{A+\sec^2 x}=2\int_0^\pi\frac{d\tan x}{A+1+\tan^2 x}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{A+1+t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{A+1}}\int_0^{+\infty}\frac{d\frac{t}{\sqrt{A+1}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{A+1}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{A+1}}\arctan\frac{t}{\sqrt{A+1}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{A+1}}$$

$$\pi^p\left(k+1\right)^p\cdot\int_0^\pi\frac{dx}{1+\pi^q k^q\left|\sin x\right|^2},\ A=\pi^q k^q$$

$$=\pi^p\left(k+1\right)^p\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\pi^q k^q+1}}=C\cdot\frac{\left(k+1\right)^p}{k^{\frac{q}{2}}}\left(1+o\left(1\right)\right)=C\cdot\frac{1}{k^{\frac{q}{2}-p}}\left(1+o\left(1\right)\right);$$

$$\pi^p k^p\cdot\int_0^\pi\frac{dx}{1+\pi^q\left(k+1\right)^q\left|\sin x\right|^2},\ A=\pi^q k^q$$

$$=\pi^p k^p\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\pi^q\left(k+1\right)^q+1}}=C\cdot\frac{k^p}{k^{\frac{q}{2}}}\left(1+o\left(1\right)\right)=C\cdot\frac{1}{k^{\frac{q}{2}-p}}\left(1+o\left(1\right)\right),$$

（装订线内不要答题）

则有 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^2}dx \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{2}-p}}$

故有，$\begin{cases} \frac{q}{2}-p>1, \text{广义积分收敛；} \\ \frac{q}{2}-p\le 1, \text{广义积分发散} \end{cases}$

（b）研究 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^2}, p,q>0$ 的存在性

考虑 $\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^2}$ 在 $x=n\pi$ 的取值为 $(n\pi)^p \to +\infty, \ as\ n\to+\infty$，故有此极限不存在有限极限值.