复旦大学技术科学实验班
2021～2022 学年第二学期期末考试试卷
☑A 卷　　□B 卷

课程名称：数学分析 BII　　课程代码：MATH120017.01-08

开课院系：计算机科学技术学院等　　考试形式：闭卷

姓　名：________　　学　号：________　　专　业：________

声明：我已知悉学校对于考试纪律的严肃规定，将秉持诚实守信宗旨，严守考试纪律，不作弊，不剽窃；若有违反学校考试纪律的行为，自愿接受学校严肃处理。

学生（签名）：________

年　　月　　日

（装订线内不要答题）

（装订线内不要答题）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、严格表述题（8%，每题 2 分，共 4 题）

1. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 数集 D 上一致收敛的 Cauchy 收敛原理。

2. 用邻域的概念表述：设 S 是 R^n 上的点集，x_0 是 S 的聚点。

3. 二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微。

4. Guass 公式（严格表述条件与结论）。

二、填空题（24%，每题 4 分，共 6 题）

1. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 的和等于__________.

2. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $P\,(\,2\,,1\,,\,0\,)$ 处的切平面方程为____________________.

3. 设隐函数方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$，其中 $z = z(x, y)$，则在点 $P\left(\sqrt{2},1,1\right)$ 处的全微分 $dz =$______________.

4. $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-\pi,0) \\ 0 & x\in[0,\pi) \end{cases}$ 的 Fourier 级数是____.

5、二元函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P\,(\,1\,,\,0\,)$ 处沿非零向量 $v = \mathbf{i}\text{-}\mathbf{j}$ 的方向导数为____________________.

6、向量场 $\mathbf{a}(x, y, z) = xyz(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ 在点 $P\,(\,1\,,2\,,3\,)$ 的旋度为 ______________________.

三、判断简答题（30%，每题 6 分，答“对”的，请简要证明；答“错”的，请举反例并简要说明，答对错占 2 分，简要证明或者举反例占 4 分。）

1. 1. 假设 $\{u_n\}$ 是单调减少数列，且 $u_n > 0, n = 1,2,3,\cdots$，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})$ 收敛。

2. 假设二元函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内固定变量 y，作为一元函数关于自变量 x 是连续的，且关于自变量 y 满足 Lipschitz 条件：

   $\left|f(x, y') - f(x, y'')\right| \le L\left|y' - y''\right|$，其中 (x, y')，$(x, y') \in D$，L 是常数。

   则 f 在 D 内二元连续。

3. 假设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个去心邻域内有定义的二元函数，两个二次极限存在且相等，即 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$，则二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ 也存在.

（装订线内不要答题）

4. $\iint\limits_D f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(u)du$ ，其中函数 f 在有限区间 $[-1,1]$ 上黎曼可积，

$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$.

5. 第二类曲线积分： $\int_L \frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在 $R^2\setminus\{0,0\}$ 上与积分路径无关。

四、级数题（8%，每题 4 分，共 2 题）

1. 讨论 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q}$ 的收敛性(讨论参数 p, q， 以确定此级数收敛或者发散)。

2. 将函数 $\ln(1-x-x^2+x^3)$ 展开成幂级数的形式，并求出其收敛半径与收敛域。

五、多元函数微分题（8%，每题 4 分，共 2 题）

1. 假设三元函数 f 可微，求由方程 $f(xy, y+z, xz)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$。

2. 通过变量代换 $u=\frac{x}{y}, v=x, w=xz-y$，变换偏微分方程 $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$，其中 w 是 u,v 的函数。

六、多元积分题（8%，每题 4 分，共 2 题）

1. 假设 $A=\int_1^2 f(u)du$ ，求二重积分 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ ，其中 D 是由 $xy=1$， $xy=2$，$y=x$， $y=4x$ 所围成的区域。

2. 计算 $I=\iint\limits_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为立方体 $0\le x,y,z\le a$ 的表面，方向取外侧。

七、证明题（14%，第 1 题 8 分，第 2 题 6 分）

1. 证明：假设函数 $z=f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，若积分 $h(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 对于每个 $x\in[a,b]$ 存在，则函数 $h(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且有等式

   $$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b h(x)dx=\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \text{。}$$

2. 已知平面上曲线：$ax^2+2bxy+cy^2=1$ 是中心在原点的椭圆，其中 $c>0, ac-b^2>0$。求证：这个椭圆的面积等于 $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$。