（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2022～2023学年第一学期期中考试试卷

□ A 卷 □ B 卷

课程名称： 数学分析BI **课程代码：** MATH120016.12

开课院系： 数学科学学院 **考试形式：** 闭卷

姓 名： ________ **学 号：** ________ **专 业：** ________

题 目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

一、请用数学语言描述下列概念或者命题 (每题2分,共6分)

1. 连续函数的中间值定理(或介值定理).

   答: 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 则对于任意的$c \in [m,M]$, 都存在$\xi \in [a,b]$使得$f(\xi)=c$, 其中$m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在有限的Cauchy收敛准则.

   答: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在有限, 当且仅当

   $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x', x''\ (0<|x'-x_0|<\delta,\ 0<|x''-x_0|<\delta)$:

   $$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

3. 函数$f(x)$在$x=x_0$处二阶可导的定义.

   答: 设$f'(x)$在x_0的某个邻域上有定义. 若

   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

存在有限, 则称$f(x)$在x_0处二阶可导, 且该极限值为$f(x)$在x_0处的二阶导数, 记为$f''(x_0)$.

二、选择题(每题5分,共10分)

1. 下列命题中不真的是 (C).

(A) 若$f(x)$分别在$[0,1]$和$[2,3]$上连续, 则$f(x)$在$[0,1]\cup[2,3]$上一致连续;

(B) 若$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=A$, 则$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=A$;

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=A$, 则$\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)=A$;

(D) 若$f(x)$分别在$[0,1)$和$(1,2]$上一致连续, 则$f(x)$在$[0,1)\cup(1,2]$上一定有界.

2. 设函数$f(x)$满足

$$f\Big(\frac{(-1)^n}{n}\Big)=\frac{(-1)^n}{n}+o(\frac{1}{n})\qquad (n\to\infty)$$

则下列命题中不真的是 (D).

(A) 若$f(x)$还单调, 则$f(x)$在$x=0$处连续;

(B) 若$f(x)$还严格单调, 则$f'(0)=1$;

(C) 若$f(x)$还连续, 则$f(x)$在$x=0$处不一定可导;

(D) 若$f(x)$还一致连续, 则$f'(0)=1$.

三、填空题(每小题3分, 共24分)

1. 曲线$(y-1)^3=x-2$的拐点是 $(2,1)$;

2. 椭圆$\frac{(x-2)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$ (其中$a,b>0$) 过点(x_0,y_0)的切线方程为:

$$\frac{(x_0-2)(x-2)}{a^2}+\frac{(y_0-1)(y-1)}{b^2}=1;$$

3. 当$x\to+\infty$时, 下列变量中哪些是无穷大量, 并将这些无穷大量从低阶到高阶排列:

$$\ln x,\quad x^x,\quad x^2,\quad [x]!,\quad 3^x$$

答案: $\ln x, x^2, 3^x, [x]!, x^x$;

4. 已知$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=1$, 则 $a=-1,b=0$;

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})=$ 0;

6. 设$\sin(ax^3+bx^2+cx+d)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续, 则a,b,c,d的取值范围是:

   $a=0,b=0,c\in(-\infty,+\infty),d\in(-\infty,+\infty)$;

7. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$, 则________为其________(类型)间断点;

   答案: $x=0$, 第一类

8. 设$f(x)=(x^2+x-2)^n\arctan^2\frac{x}{2}$, 其中$n$为正整数, 求$f^{(n)}(-2)=\frac{\pi^2}{16}(-3)^n n!$.

四、判断简答题 (判断下列命题真伪. 如果正确的, 请回答"是", 并给予简要证明; 如果错误的, 请回答"否", 并举反例或者说明理由.) (每小题5分, 共20分)

1. 设$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上可导, 则$f'(x)$在$[a,b]$上有界.

   答: 否.

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中$\alpha\in(1,2)$.

$$f'(x)=\begin{cases}-\alpha(-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-(-x)^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

$f(x)$在$[0,1]$上可导, 但是$f'(x)$在$[0,1]$上无界.

2. 数列$\{x_n\}$对任意正整数p, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+p}-x_n|=0$, 则$\{x_n\}$为基本列.

答: 否.

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

则$\{x_n\}$发散, 但是对任意正整数p, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+p}-x_n|=0$.

3. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可微且$f'(0)>1$, 则存在$\delta>0$使得$f(x)$在$(-\delta,\delta)$上单调增加.

答: 否.

$$f(x)=\begin{cases}2x+4x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$f'(0)=2$; 当$x\neq 0$时,

$$f'(x)=2+8x\sin\frac{1}{x}-4\cos\frac{1}{x}.$$

取$x_n=\frac{1}{2n\pi}$, 其中$n\in\mathbb{N}^+$, 则$f'(x_n)=-2$, 从而不存在$\delta>0$使得$f(x)$在$(-\delta,\delta)$上单调增加.

4. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续, 则$f(2x+\sin x)$在$(-\infty,+\infty)$上也一致连续.

答: 是.

记$g(x)=2x+\sin x$, 则$g'(x)=2+\cos x$, 从而

$$1\le g'(x)\le 3$$

由中值定理得$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续; 又$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续, 故$f(2x+\sin x)=f\circ g(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 上也一致连续.

五、计算题(每小题5分, 共10分)

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{10}a_{10}+\sqrt{11}a_{11}+\cdots+\sqrt{n}a_n}{n^{3/2}}$.

解: Stolz公式得

$$\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}a_{n+1}}{(n+1)^{3/2}-n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{3/2}-n^{3/2}}\\
&=a\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{3/2}-n^{3/2}}=a\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}((1+\frac{1}{n})^{3/2}-1)}\\
&=a\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\frac{3}{2}n^{3/2}\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}a
\end{aligned}.$$

2. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{e^x-1}, & x\ne 0\\ 2, & x=0\end{cases}$, 求$f^{(4)}(0)$.

解: 由e^x的Maclaurin公式得

$$\frac{1}{2}f(x)=\frac{x}{x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\frac{1}{5!}x^4+o(x^4)}$$

$$= 1-(\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\frac{1}{5!}x^4)+(\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3)^2$$

$$-(\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2)^3+(\frac{1}{2!}x)^4+o(x^4)$$

$$= 1+\cdots+(-\frac{1}{5!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16})x^4+o(x^4)$$

$$= 1+\cdots x^3-\frac{1}{720}x^4+o(x^4)$$

因此

$$f^{(4)}(0) = 4!\times 2(-\frac{1}{720}) = -\frac{1}{15}.$$

六、(10分) 求

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos x+e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x^2}+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^2}\Big)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

解: 由$\ln(1+u)\sim u$得

$$\ln\Big(\cos x+e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x^2}+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^2}\Big)$$

$$\sim (\cos x-1)+e^{-\frac{1}{x^2}}(\arctan\frac{1}{x^2}+x\sin\frac{1}{x^2}) \qquad (x\to 0)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}\ln\Big(\cos x+e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x^2}+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^2}\Big)$$

$$= \lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}\Big((\cos x-1)+e^{-\frac{1}{x^2}}(\arctan\frac{1}{x^2}+x\sin\frac{1}{x^2})\Big)$$

$$= \lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}(\cos x-1)+\lim_{x\to 0}(\arctan\frac{1}{x^2}+x\sin\frac{1}{x^2})$$

$$= -\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{\pi}{2} = -\infty.$$

故

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos x+e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x^2}+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^2}\Big)^{e^{\frac{1}{x^2}}} = e^{-\infty} = 0.$$

七、(10分) 设$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$在$x=0$处连续, $f(0)=0$, 且满足

$$f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2),\qquad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

证明f在$\mathbb{R}$上一致连续.

证明: $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$在$x=0$处连续, $f(0)=0$, 故

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\ (|x|<\delta)$: $|f(x)|<\varepsilon$.

$\forall x', x''$, 只要$|x'-x''|<\delta$, 就有

$$f(x')\le f(x'')+f(x'-x'')<f(x'')+\varepsilon$$

$$f(x')\ge f(x'')-f(x'-x'')>f(x'')-\varepsilon$$

八、(10分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上三阶可导, 且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\qquad \lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0,$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0.$

证明:

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(x+\lambda_x)$$

其中$\lambda_x\in(0,1)$;

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(x-\mu_x)$$

其中$\mu_x\in(0,1)$.

两式相加, 得到

$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+f''(x)+\frac{1}{6}f'''(x+\lambda_x)-\frac{1}{6}f'''(x+\mu_x)$$

得到$\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0.$

两式相减, 得到

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{1}{6}f'''(x+\lambda_x)+\frac{1}{6}f'''(x+\mu_x)$$

得到$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$