（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2022～2023学年第一学期期末考试试卷

□ A 卷

课程名称： 数学分析BI **课程代码：** MATH120016.12

开课院系： 数学科学学院 **考试形式：** 闭卷

姓 名： ________ **学 号：** ____________ **专 业：** ________

题 目	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得 分										

一、请用数学语言描述下列概念或者命题 (每题3分,共9分)

1. 连续函数的最值定理.

2. 瑕积分$\int_a^b f(x)\,dx$收敛的Cauchy收敛准则, 其中$x=a$为唯一的瑕点.

3. 积分第一中值定理.

二、选择题(每题3分,共6分)

1. 下列命题中真命题的是 ( ).

(A) 若$f(x)$在$[0,1]$上不连续, 则$f(x)$在$[0,1]$上没有原函数;

(B) 若$f(x)$在$[0,1]$上单调上升, 则$f(x)$在$[0,1]$上一定有原函数;

(C) 若$f(x)$在$[0,1]$上单调上升, 则$|f(x)|$在$[0,1]$上不一定可积;

(D) 若$f(x)$在$[0,1]$有原函数, 则$f(x)$在$(0,1)$上的任何原函数一致连续.

2. 下列反常积分中收敛的是 (　　).

(A) $\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{x^2}\, dx$;

(B) $\int_0^1 \frac{1}{x\ln^2 x}\, dx$;

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$;

(D) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\, dx$.

三、填空题(每小题3分, 共21分)

1. 设$f(x)$满足$f(x)+\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \int_0^1 f(x)\, dx$, 求$f'(x) =$____________;

2. 曲线$y = \int_0^x \sqrt{\sin t}\, dt$ ($0 \le x \le \frac{\pi}{2}$)的弧长为: ________________;

3. 已知在$(-\infty,+\infty)$上函数$f(x)$满足$f'(x) = |x|$, 求$f(x) =$__________;

4. 设$\int_{-1}^1 \frac{\sin^{2023} x+\arctan x^{2023}+a\, x^{2021}}{x^{2022}}\, dx = 0$, 求$a$的取值范围____________;

5. 设在$[0,+\infty)$上已知$f(x) = \int_0^x (t-t^2)\sin^2 t\, dt$, 求$f(x)$的最值(若无, 回答“无”; 若有, 求之): ____________________________;

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{2x} |\sin t|\, dt}{x} =$______________;

7. 设$f(x)$在$[0,2]$上连续, 且$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 f(x)\cos(x-1)\, dx = 0$, 则$f(x)$在$[0,2]$上至少有几个零点: ______________________.

四、判断简答题 (判断下列命题真伪. 如果正确的, 请回答“是”, 并给予简要证明; 如果错误的, 请回答“否”, 并举反例或者说明理由.) (每小题6分, 共24分)

（装订线内不要答题）

（装订线内不要答题）

1. 设$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上可导, 则$f'(x)$在$[a,b]$上(Riemann)可积.

2. 设$f(x),g(x)$在有界闭区间$[a,b]$上可积, 则
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx.$$

3. 设瑕积分$\int_0^1 f(x)\,dx$ (其中$x=0$是唯一的瑕点) 满足$\int_0^1 f^2(x)\,dx$收敛, 则$\int_0^1 f(x)\,dx$也收敛.

4. 设$f(x)$在任何有限区间$[0,A]$上可积, 反常积分$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$收敛, 则$\int_0^x f(t)\,dt$在$[0,+\infty)$上一致连续.

五、计算题(每小题6分, 共12分)

1. 求$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$.

2. 求$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx$, 其中$n$为正整数.

六、(7分) 求圆盘$(x-2)^2+y^2=1$绕y轴旋转一周所生成旋转体的体积和表面积.

七、(7分) 讨论
$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x\ln^p x}\,dx$$
的敛散性(包括绝对收敛, 条件收敛和发散).

八、(7分) 证明
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,dx\Big)>0.$$

九、(7分) 证明: $\forall x>0$,
$$x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots-\frac{1}{(4n+3)!}x^{4n+3}<\sin x<x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{(4n+1)!}x^{4n+1},$$
其中n为非负整数.