（装订线内不要答题）

# 复旦大学技术科学大类

## 2022-2023学年第一学期期末网上考核试卷

课程名称：数学分析BII　　　　课程代码：MATH120017

卷　　别：■ A卷　☐ B卷　☐ C卷

姓　　名：____________　　　　学　　号：____________

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）：

年　　月　　日

**注意！请务必将答案写在答题纸上！**

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

试卷一共**四道大题**, 共 100 分. 考试时间 **120 分钟**.

**一. 定义和定理叙述题** (包含 **4 道题**, 每题 3 分, 共 12 分).

1. Bolzano-Weierstrass 定理.
2. 函数 $f$ 在区间 $I$ 上一致连续的定义.
3. Riemann 可积函数的定义.
4. 积分第一中值定理.

**二. 判断题** (判断以下说法是否正确, 若认为正确请给出证明, 若认为错误请给出反例. 包含 **4 道题**, 每题 4 分, 共 16 分. 每道题判断 1 分, 证明或给反例 3 分).

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, 那么 $\{a_n\}$ 收敛.
2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且对任意 $x\in[a,b]$ 都有 $f(x)>0$. 那么存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)\geq\delta>0$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立.
3. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.
4. 设反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

(装订线内不要答题)

**三. 计算题** (请写出计算与推导过程. 包含 **5 道题**, 共 50 分).

1. (本题 8 分, 第 (1) 小题 3 分, 第 (2) 小题 5 分) 设曲线 $C$ 的参数方程为

$$x(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ y(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2},\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

(1) $C$ 是什么曲线?

(2) 求曲线 $C$ 与直线 $x=\dfrac{e+e^{-1}}{2}$ 围成的部分的面积.

2. (本题 8 分. 本题有两小题, 其中第 (1) 小题涉及**常微分方程**的内容. 请在 (1) (2) 两个小题中**选做一个小题**, 若两小题都做, 则**只按照第 (1) 小题给分**.)

(1) 设 Riemann 可积函数 $f(x)$ 满足

$$\int_0^x f(t)dt+f(x)=x^2,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

请说明 $f(x)$ 可导, 并求出 $f(x)$.

(2) 计算

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-2x}dx,$$

其中 $n$ 是正整数.

3. (本题 12 分) 画出函数

$$f(x)=(x+1)^{4/3}(x-2)^{-1/3}$$

的图像, 需要求出单调区间, 极值点, 极值, 拐点, 保凸区间 (即函数上凸和下凸的区间) 以及渐近线.

4. (本题 10 分) 设 $p$ 是一个实数, 讨论反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$$

的敛散性 (需给出该反常积分绝对收敛, 条件收敛以及发散时 $p$ 的范围).

5. (本题 12 分, 第 (1) 小题 6 分, 第 (2) 小题 3 分, 第 (3) 小题 3 分) 设

$$f(x)=\left(1+x+x^{5/2}\right)^{1/2}.$$

(1) 设在 $x\to 0+$ 时, $f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^{5/2}+o(x^{5/2})$, 求常数 $A,B,C,D$.

(2) 求 $f''(x)$.

(3) 设 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\theta x)}{2}x^2$, 其中 $\theta=\theta(x)$ 与 $x$ 有关, 且 $0<\theta<1$. 计算 $\lim\limits_{x\to0+}\theta(x)$.

（装订线内不要答题）

**四. 证明题** (包含 **2 道题**, 共 22 分).

1. (本题 10 分, 共 2 小题, 每小题 5 分) 设 $a>0$, 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+1}{2}\right)^{1/x}, & x\neq 0,\\ \sqrt{a}, & x=0.\end{cases}$$

(1) 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

2. (本题 12 分, 共 3 小题, 每小题 4 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, $n$ 是正整数.

(1) 证明: $\displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)dx=-\int_{a+\pi/n}^{b+\pi/n} f(y-\pi/n)\sin(ny)dy.$

(2) 证明:

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(x)\sin(nx)dx=&\int_a^{a+\pi/n} f(x)\sin(nx)dx\\ &-\int_b^{b+\pi/n} f\left(x-\pi/n\right)\sin(nx)dx\\ &+\int_{a+\pi/n}^b \big(f(x)-f\left(x-\pi/n\right)\big)\sin(nx)dx.\end{aligned}$$

(3) 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx=0.$