（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学大类

2022-2023学年第一学期期末网上考核试卷

课程名称：数学分析BII　　　　课程代码：MATH120017

卷　　别：■ A卷　□ B卷　□ C卷

姓　　名：__________　　　　学　　号：__________

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）：

年　　月　　日

注意！请务必将答案写在答题纸上！

题号	一	二	三	四	总分
得分					

试卷一共**四道大题**, 共 100 分. 考试时间 **120 分钟**.

一. 定义和定理叙述题 (包含**四道题**, 每题 3 分, 共 12 分).

1. Bolzano-Weierstrass 定理.

解 有界数列一定有收敛子列.

2. 函数 f 在区间 I 上一致连续的定义.

解 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in I$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

3. 可积函数的定义.

解 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数. 在 $[a,b]$ 上任意取分点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 作成一种划分

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

并任意取点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 记小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 并令 $\lambda =$

（装订线内不要答题）

$\max\{\Delta x_i\}$. 若当 $\lambda \to 0$ 时, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在, 且极限值与划分 P 以及 ξ_i 的选取无关, 则称 f 在 $[a,b]$ 上可积.

说明 (1) **不写函数有界不扣分** (因为极限与 ξ_i 的选取无关蕴含了函数有界).

(2) **也可以在定义中要求划分是区间的 n 等分, 将 $\lambda \to 0$ 改成 $n\to\infty$.** 这样的定义是等价的.

4. 积分第一中值定理.

解 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, m 和 M 分别表示 f 在 $[a,b]$ 上的下确界和上确界, 则存在 $\eta\in[m,M]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta\int_a^b g(x)dx.$$

特别地, 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

说明 两种情况写出一种就给分. **若写的是 $g(x)\equiv 1$ 的特殊情况也给分**.

二. 判断题 (判断以下说法是否正确, 若认为正确请给出正面, 若认为错误请给出反例. 包含**四道题**, 每题 4 分, 共 16 分. 每道题若判断正确得 2 分).

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, 那么 $\{a_n\}$ 收敛.

解 错误. 可以取 $a_n=\ln n$ 或者 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且 $f(x)>0$. 那么存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)\geq\delta>0$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立.

解 正确. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 所以 f 在某个 $x_0\in[a,b]$ 处取到最小值. 因为 $f(x_0)>0$, 我们取 $\delta=f(x_0)$ 即可.

3. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

解 正确. 由 l'Hospital 法则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=+\infty.$$

说明 可能也会有同学用微分中值定理证明 (即在这个特殊情况下重新证明一遍

l'Hospital 法则).

4. 设反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

解 错误. 可以取

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[n,n+\frac{1}{n^2}],\\ 0, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

或者

$$f(x)=\sin(x^2).$$

三. 计算题 (请写出计算与推导过程. 包含**五道题**, 共 50 分).

1. (本题 8 分, 第一小题 3 分, 第二小题 5 分) 设曲线 C 的参数方程为

$$x(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ y(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2},\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

(1) C 是什么曲线?

(2) 求曲线 C 与直线 $x=\dfrac{e+e^{-1}}{2}$ 围成的部分的面积.

解 (1) $x(t)^2-y(t)^2=1$ 且 $x(t)>0$. 所以 C 是双曲线的一支.

说明 只写双曲线也给分.

(2) 这部分图形关于 x 轴对称, 在 x 轴上方的部分由 x 轴, $x=\frac{e+e^{-1}}{2}$ 以及 C 在参数 $0\le t\le 1$ 围成. 这部分面积为

$$\int_0^1 y(t)x'(t)dt=\int_0^1\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2dt=\int_0^1\frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}dt=\frac{e^2-e^{-2}}{8}-\frac{1}{2}.$$

因此要计算的面积为 $\frac{e^2-e^{-2}}{4}-1$.

说明 (1) 第二问也可以在直接对 t 从 $(-1,1)$ 积分, 这样可以直接求出结果.

(2) 可能会有同学在直角坐标下计算. 这时需要求积分 $\int_1^{(e+e^{-1})/2}\sqrt{x^2-1}dx$. 这样计算可能会得到未化简的结果.

2. (本题 8 分. 本题有两小题, 其中第一小题涉及**常微分方程**的内容. 请在两题中**选做一题**, 若两题都做, 则**只按照第一小题给分**.)

(1) 设可积函数 $f(x)$ 满足

$$\int_0^x f(t)dt+f(x)=x^2, x\in(-\infty,+\infty),$$

请说明 $f(x)$ 可导, 并求出 $f(x)$.

（装订线内不要答题）

解 由于 f 可积, 我们知道 $\int_0^x f(t)dt$ 关于 x 连续. 于是 $f(x) = x^2 - \int_0^x f(t)dt$ 是连续的. 由此我们进一步知道 $\int_0^x f(t)dt$ 关于 x 可导. 于是 $f(x) = x^2 - \int_0^x f(t)dt$ 是可导的.

代入 $x = 0$, 得到 $f(0) = 0$.

我们在等号两边关于 x 求导, 得到

$$f(x) + f'(x) = 2x.$$

从而 $(f(x)e^x)' = 2xe^x$. 结合 $f(0) = 0$, 我们有

$$f(x)e^x = \int_0^x 2te^t dt = 2xe^x - 2\int_0^x e^t dt = 2xe^x - 2e^x + 2.$$

从而 $f(x) = 2x - 2 + 2e^{-x}$.

(2) 计算

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-2x} dx,$$

其中 n 是正整数.

解 我们有

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x^n e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{n}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx = \frac{n}{2} I_{n-1}.$$

所以

$$I_n = \frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

3. (本题 12 分) 画出函数

$$f(x) = (x+1)^{4/3}(x-2)^{-1/3}$$

的图像, 需要求出单调区间, 极值点, 极值, 拐点, 保凸区间 (即函数上凸和下凸的区间) 以及渐近线.

解 首先函数的定义域为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. $\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty$. 特别地, 这说明 $x = 2$ 是一条渐近线.

在 $x \neq 2$ 时, $f(x)$ 可导. 我们有

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4}{3}(x+1)^{1/3}(x-2)^{-1/3} - \frac{1}{3}(x+1)^{4/3}(x-2)^{-4/3} \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^{1/3}(x-2)^{-4/3}\big(4(x-2)-(x+1)\big) \\
&= (x+1)^{1/3}(x-2)^{-4/3}(x-3).
\end{aligned}
$$

那么 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 递增, $(-1,2)$ 和 $(2,3)$ 递减, $(3,+\infty)$ 递增. $x=-1$ 是极大值点, 极大值为 $f(-1)=0$. $x=3$ 是极小值点, 极小值为 $f(3)=128^{1/3}$.

$f(z)$ 在 $x \neq 1$ 和 $x \neq 2$ 时有二阶导数. 我们有

$$
\begin{aligned}
f''(x) = &\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}(x-2)^{-4/3}(x-3) - \frac{4}{3}(x+1)^{1/3}(x-2)^{-7/3}(x-3) \\
&+ (x+1)^{1/3}(x-2)^{-4/3} \\
= &\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}(x-2)^{-7/3}\big((x-2)(x-3)-4(x+1)(x-3)+3(x+1)(x-2)\big) \\
= &4(x+1)^{-2/3}(x-2)^{-7/3}.
\end{aligned}
$$

那么 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是上凸的, $(2,+\infty)$ 上是下凸的. $f(x)$ 没有拐点.

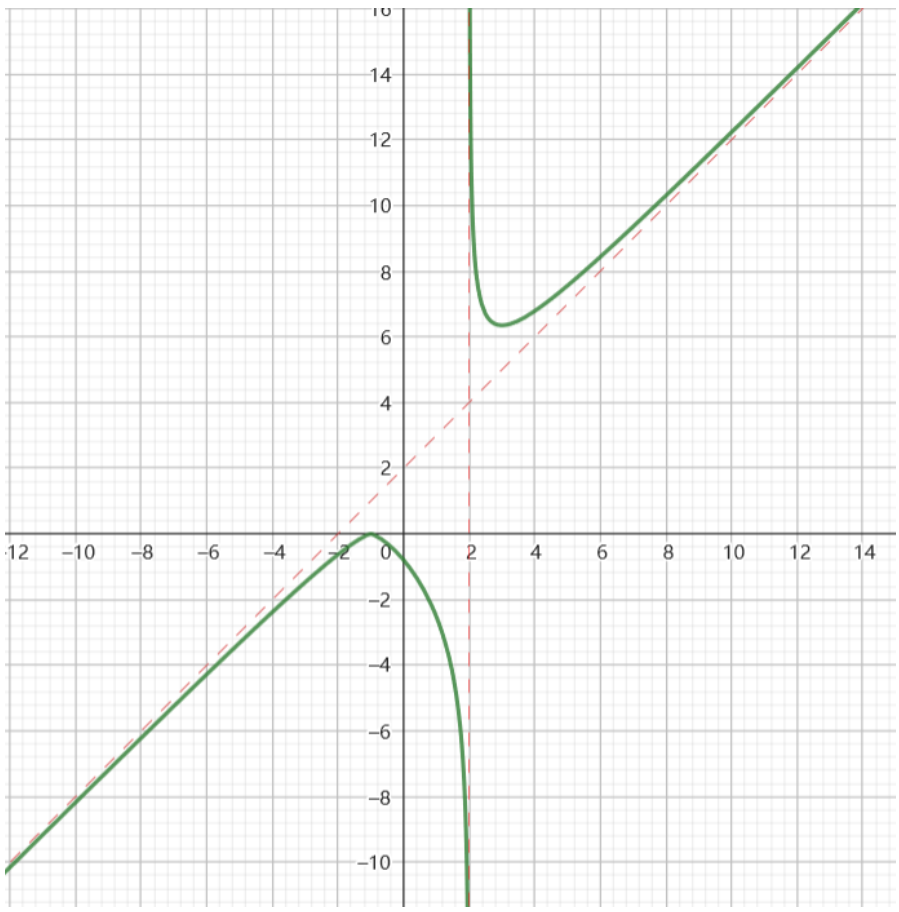
目前已经知道 $x=2$ 是 $f(x)$ 的渐近线. 注意到

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(1+1/x)^{4/3}(1-2/x)^{-1/3} \\
&= x\left(1+\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= x\left(1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= x+2+o(1), \quad x \to \infty.
\end{aligned}
$$

因此 $f(x)$ 还有一条渐近线 $y=x+2$.

$f(x)$ 的图像如图 (见下一页).

说明 有一些同学可能会认为 $x=2$ 是拐点. 由于书上未明确给出拐点的定义 (但是暗示了函数需要在拐点处有定义), 这种情况可以考虑不扣分.



4. (本题 10 分) 判断反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

的敛散性 (需给出该反常积分绝对收敛, 条件收敛以及发散时 p 的范围).

解 首先将反常积分分成两部分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

对于第一部分, 函数是非负的, 且 $\sin x/x^p \sim x^{1-p}$, $(x \to 0)$. 那么这部分在 $1 - p > -1$, 即 $p < 2$ 时收敛, $p \geq 2$ 时发散.

对于第二部分:

(1) 当 $p > 1$ 时, 反常积分绝对收敛.

(2) 当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $\int_1^A \sin x dx$ 有界, 而 $1/x^p$ 在 $x \to +\infty$ 时单调下降且收敛于 0, 根据 Dirichlet 判别法, 这时积分收敛. 另一方面, 注意到

$$\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{x^p} - \frac{2\cos 2x}{x^p}.$$

同样由 Dirichlet 判别法, 我们知道 $\int_1^{+\infty}\frac{2\cos 2x}{x^p}dx$ 收敛. 另一方面, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 发散. 所以这时积分不绝对收敛.

(3) $p\le 0$ 时, 我们有

$$\int_{2n\pi+\pi/4}^{2n\pi+3\pi/4}\frac{\sin x}{x^p}dx \ge \int_{2n\pi+\pi/4}^{2n\pi+3\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

根据 Cauchy 收敛原理可知这时积分发散.

综上所述, $p\ge 2$ 和 $p\le 0$ 时积分发散, $1<p<2$ 时积分绝对收敛, $0<p\le 1$ 时积分条件收敛.

5. (本题 12 分, 第一小题 6 分, 第二小题 3 分, 第三小题 3 分) 设

$$f(x)=\left(1+x+x^{5/2}\right)^{1/2}.$$

(1) 设在 $x\to 0+$ 时, $f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^{5/2}+o(x^{5/2})$, 求 A,B,C,D.

(2) 求 $f''(x)$.

(3) 设 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\theta x)}{2}x^2$, 其中 $\theta=\theta(x)$ 与 x 有关, 且 $0<\theta<1$. 计算 $\lim\limits_{x\to 0+}\theta(x)$.

解 (1) 函数 $(1+u)^{1/2}$ 的 Taylor 展开式为

$$(1+u)^{1/2}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+o(u^3),\quad u\to 0.$$

代入 $u=x+x^{5/2}$. 那么 $u^3=x^3(1+x^{3/2})^3=o(x^{5/2})$. 于是

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\frac{x+x^{5/2}}{2}-\frac{(x+x^{5/2})}{8}+o(x^{5/2})\\&=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^{5/2}}{2}+o(x^{5/2}),\quad x\to 0.\end{aligned}$$

于是 $A=1$, $B=1/2$, $C=-1/8$, $D=1/2$.

(2) 我们有

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1+x+x^{5/2}\right)^{-1/2}\left(1+\frac{5}{2}x^{3/2}\right)$$

从而

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\left(1+x+x^{5/2}\right)^{-3/2}\left(1+\frac{5}{2}x^{3/2}\right)^2+\frac{15}{8}\left(1+x+x^{5/2}\right)^{-1/2}x^{1/2}.$$

（装订线内不要答题）

(3) 结合 (1) 和 (3) 中的展开式, 我们有

$$\frac{f''(\theta x)}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{x^{5/2}}{2} + o(x^{5/2}), \quad x \to 0+,$$

即

$$f''(\theta x) = -\frac{1}{4} + x^{1/2} + o(x^{1/2}), \quad x \to 0+,$$

利用 (2), 我们有

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{2}x + o(x)\right)(1 + o(x)) + \frac{15}{8}\left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right)x^{1/2} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{15}{8}x^{1/2} + o(x^{1/2}), \quad x \to 0+. \end{aligned}$$

从而

$$\frac{15}{8}(\theta x)^{1/2} = x^{1/2} + o(x^{1/2}), \quad x \to 0+.$$

由此可得

$$\theta = \frac{64}{225} + o(1), \quad x \to 0+,$$

于是 $\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{64}{225}$.

四. 证明题 (包含两道题, 共 22 分).

1. (本题 10 分, 共两小题, 每小题 5 分) 设 $a > 0$, 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{a^x + 1}{2}\right)^{1/x}, & x \neq 0, \\ \sqrt{a}, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

证明 由于

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^x + 1}{2}\right)^{1/x} &= \left(1 + \frac{a^x - 1}{2}\right)^{1/x} \\ &= \left(1 + \frac{x\ln a}{2} + o(x)\right)^{1/x} \\ &= \left(1 + x\ln\sqrt{a} + o(x)\right)^{1/x} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(1 + x\ln\sqrt{a} + o(x))} \\ &= e^{\ln\sqrt{a} + o(1)}, \quad x \to 0. \end{aligned}$$

（装订线内不要答题）

因此

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{\ln\sqrt{a}} = \sqrt{a}.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 时连续.

(2) 我们进一步有

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^x+1}{2}\right)^{1/x} &= \left(1+\frac{a^x-1}{2}\right)^{1/x}\\ &= \left(1+\frac{x\ln a}{2}+\frac{x^2\ln^2 a}{4}+o(x^2)\right)^{1/x}\\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x\frac{\ln a}{2}+x^2\frac{\ln^2 a}{4}+o(x^2))}, \quad x\to 0.\end{aligned}$$

利用 $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$, $(u\to 0)$, 我们有

$$\begin{aligned}\ln\left(1+x\frac{\ln a}{2}+x^2\frac{\ln^2 a}{4}+o(x^2)\right) =& \left(x\frac{\ln a}{2}+x^2\frac{\ln^2 a}{4}+o(x^2)\right)\\ &-\frac{1}{2}\left(x\frac{\ln a}{2}+x^2\frac{\ln^2 a}{4}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\\ =&x\frac{\ln a}{2}+x^2\left(\frac{\ln^2 a}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a}{2}\right)^2\right)+o(x^2)\\ =&x\frac{\ln a}{2}+x^2\frac{\ln^2 a}{8}+o(x^2), \quad x\to 0.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^x+1}{2}\right)^{1/x} &= e^{\frac{\ln a}{2}+\frac{\ln^2 a}{8}x+o(x)}\\ &= \sqrt{a}e^{\frac{\ln^2 a}{8}x+o(x)}\\ &= \sqrt{a}\left(1+\frac{\ln^2 a}{8}x+o(x)\right)\\ &= \sqrt{a}+\frac{\ln^2 a}{8}\sqrt{a}x+o(x), \quad x\to 0.\end{aligned}$$

由此可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 时可导, 且 $f'(0)=\frac{\ln^2 a}{8}\sqrt{a}$.

2. (本题 12 分, 共三小题, 每小题 4 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, n 是正整数.

(1) 证明: $\displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = -\int_{a+\pi/n}^{b+\pi/n} f\left(y-\frac{\pi}{n}\right)\sin(ny)dy.$

(2) 证明:

$$2\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = \int_a^{a+\pi/n} f(x)\sin(nx)dx - \int_b^{b+\pi/n} f\left(x-\pi/n\right)\sin(nx)dx + \int_{a+\pi/n}^{b} \left[f(x)-f\left(x-\pi/n\right)\right]\sin(nx)dx.$$

(3) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$

证明 (1) 令 $y = x+\pi/n$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx &= \int_{a+\pi/n}^{b+\pi/n} f\left(y-\frac{\pi}{n}\right)\sin\Big(n(y-\pi/n)\Big)dy \\ &= \int_{a+\pi/n}^{b+\pi/n} f(y-\pi/n)\sin(ny-\pi)dy \\ &= -\int_{a+\pi/n}^{b+\pi/n} f(y-\pi/n)\sin(ny)dy.\end{aligned}$$

(2) 利用 (1), 我们有

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(x)\sin(nx)dx &= \int_a^b f(x)\sin(nx)dx - \int_{a+\pi/n}^{b+\pi/n} f(x-\pi/n)\sin(nx)dx \\ &= \int_a^{a+\pi/n} f(x)\sin(nx)dx \\ &\quad - \int_b^{b+\pi/n} f\left(x-\pi/n\right)\sin(nx)dx \\ &\quad + \int_{a+\pi/n}^{b} \left[f(x)-f\left(x-\pi/n\right)\right]\sin(nx)dx.\end{aligned}$$

(3) 只要证 (2) 中等号右边的三个积分在 $n\to\infty$ 时都收敛于 0. 因为 f 在 $[a,b]$ 上连续, 所以 f 在 $[a,b]$ 上有界. 设 $|f|\le M$. 那么

$$\left|\int_a^{a+\pi/n} f(x)\sin(nx)dx\right| \le \int_a^{a+\pi/n} |f(x)\sin(nx)|dx \le \frac{M\pi}{n} \to 0, \quad n\to\infty.$$

同理,

$$\left|\int_b^{b+\pi/n} f\left(x-\pi/n\right)\sin(nx)dx\right| \to 0, \quad n\to\infty.$$

又因为 f 在 $[a,b]$ 上是一致连续的, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时有

$$|f(x)-f(x-\pi/n)|<\frac{\varepsilon}{b-a},\quad \forall x\in[a+\pi/n,b].$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_{a+\pi/n}^{b}[f(x)-f(x-\pi/n)]\sin(nx)dx\right| &\le \int_{a+\pi/n}^{b}\big|[f(x)-f(x-\pi/n)]\sin(nx)\big|dx\\ &\le (b-a-\pi/n)\frac{\varepsilon}{b-a}\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

这样就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a+\pi/n}^{b}[f(x)-f(x-\pi/n)]\sin(nx)dx=0.$$

（装订线内不要答题）