期中考试

2022 年 11 月 9 日

问题 1　(共 16 分, 每小问 4 分) 严格叙述定义和定理

1. 数集 A 的上确界定义.

解: A 的最小上界.

(或写成: 一个实数 x, 使得对任意 $a \in A$ 有 $a \leq x$, 且对任意 $y < x$, 存在 $a' \in A$, 使得 $a' > y$.)

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 的定义.

解: 对任意 $G > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $|f(x)| > G$.

3. 闭区间套定理 (需要写出闭区间套的定义).

解: 若一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,

(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 构成一个闭区间套.

如果 $\{[a_n, b_n]\}$ 构成一个闭区间套, 则存在唯一的 ξ 在所有 $[a_n, b_n]$ 中, 且 $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

4. f 在 x_0 可微的定义.

解: 存在常数 A 使得 $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, $(x \to x_0)$.

问题 2　(共 42 分, 每小问 7 分) 计算题, 请写出计算过程.

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(x - \pi/2)\tan x$.

解:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)\tan x &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\pi/2)\sin x}{\cos x}\\ &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\pi/2)\cos(\pi/2-x)}{\sin(\pi/2-x)}\\ &= -1.\end{aligned}$$

2. 求函数 $f(x) = \frac{x}{\ln|x|}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

解: $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. 因为 $f(x)$ 为初等函数, 所以它在定义域内连续.

下面讨论在 $x=0$, $x=\pm 1$ 时的情况.

因为 $\lim_{x\to 0} x=0$, $\lim_{x\to 0}\ln|x|=-\infty$, 所以 $\lim_{x\to 0} x/\ln|x|=0$, 从而 $x=0$ 是第三类间断点 (或者说可去间断点).

因为 $\lim_{x\to 1} x=1$, $\lim_{x\to 1}\ln|x|=0$, 所以 $\lim_{x\to 1} x/\ln|x|=+\infty$, 从而 $x=1$ 是第二类间断点.

3. 已知方程 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 确定了一个图像在第一象限的函数 $y=y(x)$, 求 $y'(x)=0$ 时 x 的值.

解法一: 在 $y=y(x)$ 是方程 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 确定的隐函数, 那么我们将 $y=y(x)$ 代入方程, 并在方程两边对 x 求导, 得到

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy')=2x-2yy',$$

从而

$$y'=\frac{x-2x(x^2+y^2)}{2y(x^2+y^2)+y}.$$

当 $y'=0$ 时, 我们有 $x-2x(x^2+y^2)=0$. 结合 $x>0, y>0$, 我们有 $x^2+y^2=1/2$. 再结合 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$, 我们又有 $x^2-y^2=1/4$. 由此可解得 $x=\sqrt{6}/4$.

解法二: 考虑极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0)$. 那么方程 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 可表示为 $r^2=\cos 2\theta$. 在第一象限内 $r>0$, $\theta\in(0,\pi/2)$. 再结合 $\cos 2\theta>0$, 我们知道 $0<\theta<\pi/4$.

注意到 $r=\sqrt{\cos 2\theta}$, 从而我们可以得到 $y=y(x)$ 的参数方程表示:

$$x(\theta)=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,\quad y(\theta)=\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta.$$

注意到 $y'(x)=\frac{dy}{d\theta}/\frac{dx}{d\theta}$, 所以我们只需要

$$\frac{dy}{d\theta}=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta-\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin\theta=\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}=0,\quad 0<\theta<\pi/4.$$

由此可知 $\theta=\pi/6$, 这时 $x=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta=\sqrt{6}/4$.

4. 计算极限

(1) $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$,

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(n^{1/n}-1)$.

解: (1) 可以用书上例 2.2.4 的方法, 也可以利用 Stolz 定理:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}\\ =&e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)-n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\ln(1+1/n)}=e^0=1.\end{aligned}$$

(2) 利用 $e^x = 1 + x + o(x)$, $(x \to 0)$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(n^{1/n} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln n}{n}} - 1}{\frac{\ln n}{n}} = 1.$$

5. 计算 $f(x) = x^{2022}\cos x$ 在 $x = 0$ 处的 2024 阶导数.

解: 由 Leibniz 公式,

$$f^{(2024)}(x) = \sum_{k=0}^{2024} C_{2024}^k (x^{2022})^{(2024-k)}(\cos x)^{(k)}.$$

当 $2024 - k > 2022$ 时, $(x^{2022})^{(2024-k)} = 0$, 而当 $2024 - k < 2022$ 时, $(x^{2022})^{(2024-k)}$ 在 $x = 0$ 时为 0. 因此, 上面的和式中, 若 $x = 0$, 只有 $2024 - k = 2022$, 即 $k = 2$ 的项不为 0. 因此

$$f^{(2024)}(0) = \frac{2024 \times 2023}{2} \times 2022!(\cos x)''|_{x=0} = -\frac{2024!}{2}.$$

6. 求不定积分

$$\int [x]\sin(2\pi x)dx,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解: 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数. 那么, 当 $k \le x < k+1$ 时, $F'(x) = f(x) = k\sin(2\pi x)$. 由此可知当 $k \le x < k+1$ 时, 我们有

$$F(x) = -\frac{k}{2\pi}\cos(2\pi x) + C_k.$$

那么

$$\lim_{x\to k+} F(x) = -\frac{k}{2\pi} + C_k, \quad \lim_{x\to(k+1)-} F(x) = -\frac{k}{2\pi} + C_k.$$

因为 $F(x)$ 连续, 所以它在 k 处连续, 由此可知

$$-\frac{k}{2\pi} + C_k = -\frac{k-1}{2\pi} + C_{k-1}.$$

因此

$$C_k - C_{k-1} = \frac{1}{2\pi}.$$

那么可以求得 $C_k = \frac{k}{2\pi} + C_0$, 其中 C_0 可以是任意常数, 我们用 C 表示. 从而当 $k \le x < k+1$ 时,

$$F(x) = -\frac{k}{2\pi}\cos(2\pi x) + \frac{k}{2\pi} + C,$$

即

$$F(x) = \int [x]\sin(2\pi x)dx = -\frac{[x]}{2\pi}\cos(2\pi x) + \frac{[x]}{2\pi} + C.$$

问题 3 (共 24 分, 每题 6 分) 判断题. 请判断以下命题是否正确并说明理由. 每小题判断正确得 2 分.

1. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域上有定义, 且

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A,$$

那么 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0)=A/2$.

答: 不正确. 比如 $f(x)=|x|$, 在 $x=0$ 处不可导, 但

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=0.$$

2. 设 $u(x)$ 是定义在 $(0,\delta_0)$ 上的函数, 其中 $\delta_0>0$. 如果对任意 $0<\varepsilon<1$, 当 $x\to 0+$ 时有 $u(x)=o(x^{1-\varepsilon})$, 那么当 $x\to 0+$ 时有 $u(x)=O(x)$.

答: 不正确. 比如考虑 $u(x)=x\ln\frac{1}{x}$. 那么

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{x^{1-\varepsilon}}=\lim_{x\to 0}x^{\varepsilon}\ln\frac{1}{x}=0$$

而

$$\frac{u(x)}{x}=\ln\frac{1}{x}$$

在 $x\to 0+$ 时是无界的.

3. 设 f 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的连续函数, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty$, 那么要么 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 要么 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

答: 正确. 因为 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty$, 所以对任意 $G>0$, 存在 $X>0$, 使得 $x>X$ 时有 $|f(x)|>G$. 我们下面证明要么 $f(x)>G$ 对 $x>X$ 恒成立, 要么 $f(x)<-G$ 对 $x>X$ 恒成立. 事实上, 如果存在 $x_1,x_2>X$, 使得 $f(x_1)>G$, $f(x_2)<-G$, 那么根据 f 的连续性以及零点存在定理, 存在 x_0 在 x_1 与 x_2 之间, 使得 $f(x_0)=0$. 但是 $x_0>X$, 所以应该有 $|f(x_0)|>G$, 这就产生了矛盾.

4. 如果对任意 $\varepsilon>0$ 和正整数 p, 都存在 N, 使得 $n>N$ 时, $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$, 那么数列 $\{x_n\}$ 收敛.

答: 不正确. 比如 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

问题 4 (共 18 分, 第一题 8 分, 第二题 10 分)

1. (1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界并且一致连续, 证明函数 $y=f(x)\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 证明 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

证明: (1) 设 $|f(x)|\le M$. 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, 那么

$$\begin{aligned}|f(x_1)\sin x_1-f(x_2)\sin x_2|&\le|f(x_1)-f(x_2)|\cdot|\sin x_1|+|f(x_2)|\cdot|\sin x_1-\sin x_2|\\&\le|f(x_1)-f(x_2)|+M|\sin x_1-\sin x_2|\\&\le|f(x_1)-f(x_2)|+2M\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_1-x_2}{2}\right|\\&\le|f(x_1)-f(x_2)|+M|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/2$. 因此, 当 $|x_1-x_2|<\min\{\delta,\frac{\varepsilon}{2M}\}$ 时, 我们有

$$|f(x_1)\sin x_1-f(x_2)\sin x_2|\le\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

因此 $y=f(x)\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 取 $x_n=2n\pi$, $x_n'=2n\pi+1/n$, 那么 $\lim_{n\to\infty}(x_n-x_n')=0$. 另一方面, $f(x_n)=0$, 而

$$f(x_n')=(2n\pi+1/n)\sin(2n\pi+1/n)=(2n\pi+1/n)\sin(1/n)\to2\pi.$$

于是 $\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x_n')]=-2\pi\ne0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

2. 设 $x_n=(1+1/n)^n$, $y_n=(1+1/n)^{n+1}$.

(1) 证明 $\{x_n\}$ 单调递增, $\{y_n\}$ 单调递减, 并证明他们有共同的极限.

(2) 将极限用 e 表示, 并用 $\ln x$ 表示以 e 为底的对数函数, 证明

$$\frac{3}{5}<\ln2<\frac{3}{4}.$$

证明: (1) 例 2.4.6.

(2) 要证 $\ln2>3/5$, 只要证 $e^{3/5}<2$. 由 (1) 可知

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

取 $n=4$, 我们就有

$$e^{\frac{3}{5}}<\left(1+\frac{1}{4}\right)^{5\times\frac{3}{5}}=\frac{5^3}{4^3}=\frac{125}{64}<2.$$

要证 $\ln2<\frac{3}{4}$, 只要证 $e^{3/4}>2$. 由 (1) 可知

$$e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

取 $n=8$, 我们就有

$$e^{\frac{3}{4}}>\left(1+\frac{1}{8}\right)^{8\times\frac{3}{4}}>1+\frac{C_6^1}{8}+\frac{C_6^2}{8^2}+\frac{C_6^3}{8^3}=1+\frac{131}{128}>2.$$