2022 年概率论与数理统计——期中考试

2022 年 11 月 10 日

1 填空题 (每题 4 分，共 40 分)

1. 已知 A、B、C 是三个两两独立的事件，且 $ABC=\emptyset$，$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，$P(A)=P(B)=P(C)$，则 $P(A)=$________

2. 7 封信随机放在七个信封里，有两封在他正确的信封里但其他五封均不在正确信封里的概率是________

3. 从区间 $(0,1)$ 中任取两个数 x、y，则 $\dfrac{x}{y}$ 的整数部分为偶数的概率为________

4. 假设某种疾病在人群中的患者比例是 1.3‰，通过某种技术进行检测，患者被查出的概率是 40%，健康人不会被误判，那么检测为阴性的人中实际是患者的概率是________

5 下面 4 个函数中，可以作为随机变量 X 的分布函数是________。

$$(1)\ F_1(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{3}, 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2}, 1\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}\qquad (2)\ F_2(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, x\ge 0\end{cases}$$

$$(3)\ F_3(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{4}x^2, 0\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}\qquad (4)\ F_4(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1-e^{-x}, x\ge 0\end{cases}$$

6. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\le a+1|Y>a\}=$________

7. 在单位圆内任取 n 点，则它们在同一个半圆内的概率为________

8. 设随机变量 $X\sim b(3,p)$，$Y\sim b(2,p)$，若 $P\{X\ge 1\}=19/27$，求 $P\{Y\ge 2\}=$________

9. 公司有 3000 个员工，装有 4 个饮水机，员工可以去任意饮水机接水，根据调查该公司员工任一时刻去接水的概率为 0.001，员工去接水需要排队的概率为 (保留两位小数)________

10 已知随机变量 X 服从参数 $\mu=3$ 的正态分布，$P(3<X\le 5)=0.3$，若随机变量 Y 表示对 X 的三次独立观察中事件 $(X<1)$ 出现的次数，则 $P(Y=2)=$________

2 简答题 (共 60 分)

1. (5 分) 若某路口在任何长为 t 的时间内出现 A、B 两种车辆的次数 $N_A(t)$、$N_B(t)$ 分别服从参数为 $\lambda_A t$、$\lambda_B t$ 的泊松分布，且两种车辆的出现相互独立，试求该路口从某时刻起出现的第一辆车是 A 种车的概率。

2.(15 分) 设 X 的概率密度函数为：

$$f_x(x) = ae^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$$

(1) 求 a

(2) 求 X 落在区间 (-∞,2) 内的概率

(3) 求 X 的分布函数 $F_X(x)$

3.(10 分) 设 X 服从标准正态分布，求

(1) $U = 2X + 1$ 的分布

(2) $V = 2|X|$ 的分布

4.(10 分) 现有一枚质地不均匀的硬币，其抛出正面的概率为 p，抛出反面的概率为 $1 - p$，p 的值与硬币制作过程中的随机因素有关，可认为是离散型随机变量，先验概率的分布列为 $P(p = \frac{1}{3}) = P(p = \frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$。记随机变量 X 为 N 次抛硬币实验中正面朝上的次数。

(1) 试求 (X, p) 的联合概率分布，并论证 X 与 p 是否独立。

(2) 若在某次实验中，硬币有 a 次正面向上（$0 \leq a \leq N$），试求 p 的后验概率分布。

5.（20 分）设 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(k-x-y), & 0<x<2, 2<y<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数 k;

(2) 求分布函数；

(3) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$；

(4) X, Y 是否独立?

(5) 求 $P((X-Y)^2 \leq 9)$。

参考答案（请勿打印到卷子里）

填空题

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{11}{60}$
3. $1 - \ln 2/2$
4. $\frac{13}{16658}$
5. (1)(3)(4)
6. $1 - \frac{1}{e}$
7. $\dfrac{n}{2^{n-1}}$
8. $\frac{1}{9}$
9. 0.18
10. $3 \times 0.2^2 \times 0.8 = 0.096$

简答题

1. 设 T_A、T_B 分别表示两种车下次到达间隔的时间。
$F(t_A) = 1 - P(T_A > t_A) = 1 - P(N_A(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda_A t_A} \Rightarrow T_A \sim \mathscr{E}(\lambda_A)$
同理 $T_B \sim \mathscr{E}(\lambda_B)$
$P(T_A < T_B) = \displaystyle\int_0^\infty \int_{t_A}^\infty \lambda_A e^{-\lambda_A t_A} \lambda_B e^{-\lambda_B t_B} \mathrm{d}t_B \mathrm{d}t_A = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$

2.
(1) $|x| \sim 2a\mathscr{E}(1) \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$
(2) $P(X < 2) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2} e^{-x} \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2e^2}$
(3) $F_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^x \mathrm{d}x = \frac{e^x}{2} & x < 0 \\ 1 - \displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{2} e^{-x} \mathrm{d}x = 1 - \frac{e^{-x}}{2} & x \geq 0 \end{cases}$

3.
(1) $X = \dfrac{U-1}{2}$，$f_U(u) = f_X(x)\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}U} = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-1)^2}{8}}$
(2) 由于对称性不妨令 $X = \dfrac{V}{2}$，$f_V(v) = \begin{cases} 2f_X(x)\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}V} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{8}} & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases}$

4.
(1) $P(X = k, p = \dfrac{1}{3}) = P(X = k | p = \dfrac{1}{3}) P(p = \dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{2} C_N^k \dfrac{2^{N-k}}{3^N}$
同理 $P(X = k, p = \dfrac{2}{3}) = \dfrac{1}{2} C_N^k \dfrac{2^k}{3^N} \quad k = 0, 1, 2, ..., N$
其余情形概率为 0。(这句可以不写吗?)
$P(X = k) = \dfrac{1}{2} C_N^k \dfrac{2^{N-k} + 2^k}{3^N}$，显然 $P(X = k) \neq P(X = k | p = \dfrac{1}{3})$，不独立。
(2) $P(p = \dfrac{1}{3} | X = a) = \dfrac{P(X = a, p = \frac{1}{3})}{P(X = a)} = \dfrac{2^{N-a}}{2^{N-a} + 2^a}$

同理 $P(p=\frac{2}{3}|X=a)=\frac{2^a}{2^{N-a}+2^a}$
其余情形概率为 0。

5.
(1) $\int_0^2\int_2^4\frac{1}{8}(k-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{k-4}{2}=1\Rightarrow k=6$

(2) $$F(X,Y)=\begin{cases}0 & X\le 0\text{ or }Y\le 2\\ \int_0^X\int_2^Y\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{16}X(Y-2)(10-X-Y) & 0<X\le 2\text{ and }2<Y\le 4\\ F(X,4)=\frac{1}{8}(6-X)X & 0<X\le 2\text{ and }Y>4\\ F(2,Y)=\frac{1}{8}(Y-2)(8-Y) & 2<Y\le 4\text{ and }X>2\\ 1 & X>2\text{ and }Y>4\end{cases}$$

(3) $$f_X(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,\infty)=\begin{cases}\frac{1}{4}(3-x) & 0<x<2\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(\infty,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(5-y) & 2<y<4\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{6-x-y}{2(5-y)} & 0<x<2\\ 0 & \text{else}\end{cases},2<y<4$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{6-x-y}{2(3-x)} & 2<y<4\\ 0 & \text{else}\end{cases},0<x<2$$

(4) 显然 $f_{X|Y}(x|y)\ne f_X(x)$，不独立。

(5) $P((X-Y)^2<9)=1-\int_0^1\int_{x+3}^4\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{7}{8}$