2023 计算机学院概率论与数理统计期中考试答案

考试时长：100 分钟

November 2023

1 填空题（每题 4 分，共 40 分）

1、设 A, B 是两事件，若有：$P(A-B)=0.2$，$P(B-A)=0.1$，$P(\overline{A\cup B})=0.3$，则 $P(AB)=$ ___ 0.4 ___

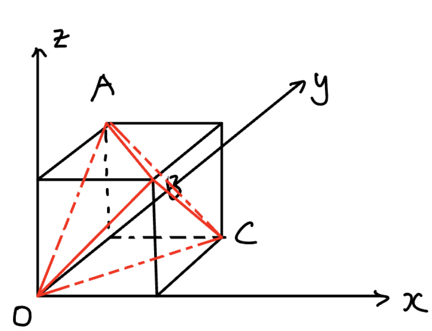
解析：直接使用公式或者画图均可，$1-0.2-0.1-0.3=0.4$

2、设一袋中有 4 个白球和 5 个红球，从中不放回地随机抽取 4 个，问：出现 2 个白球 2 个红球的概率是 ___ $\frac{10}{21}$ ___

解析：$p=\frac{C_5^2\cdot C_4^2}{C_9^4}=\frac{10}{21}$

3、在线段 AB 上取点 C, D, E，使得 AC, AD, AE 的长能构成一个三角形的概率为 ___ $\frac{1}{2}$ ___

解析：运用几何概型，设 $AC=x, AD=y, AE=z$，画出图如下：



$x+y>z$ 可转化为平面 OAB，其他平面两个同理，可以求出可行域为整个正方体切去三个角，每个角的体积是 $\frac{1}{6}$，故答案为 $1-\frac{1}{6}\cdot 3=\frac{1}{2}$

4、一学生参加选择题的测验，每一题有 5 个答案，其中只有一个答案是正确的。如果此学生明白如何解题，则他必选正确答案，否则的话他随机地在 5 个可能答案中任选 1 个。假定该学生能明白无误地解出 70 % 的试题。若此学生已选定的某题的答案是正确的，则他明白该题如何解答的概率是 ___ $\frac{35}{38}$ ___

解析：利用贝叶斯公式，他明白该题如何解答的概率是 $\frac{1\times 0.7}{1\times 0.7+0.2\times 0.3}=\frac{35}{38}$

5、设随机变量 $A\sim U[-1,9]$。则关于 y 的方程 $y^2+3Ay+1=0$ 有两个实根的概率是 ___ $\frac{13}{15}$ ___

解析：计算方程的判别式得 $A\geq\frac{2}{3}$ 或 $A\leq-\frac{2}{3}$，然后根据均匀分布即可得到答案

6、抛 5 枚均匀的硬币，设 X 表示其中正面朝上的硬币的个数，则满足 $P(X<n)\geq 0.8$ 的 n 的最小值是 ___ 4 ___

解析：$P(X=5)=\frac{1}{32}$，$P(X=4)=\frac{5}{32}$，$P(X<4)=\frac{13}{16}$ 刚好大于 0.8，故填 4

7、某单位订购 1000 只灯泡，在运输途中，灯泡被打破的概率为 0.003，设 X 为收到灯泡时被打破的灯泡数。试求 $P(X>2)=$ ___ 0.5768 ___（保留 4 位有效数字）

解析：$X\sim b(n,p)$，$n=1000$，$p=0.003$，$\lambda=np=3$，然后可以将 X 近似看作 $X\sim Poisson(3)$，即可查表求出 $P(X>2)=0.5768$

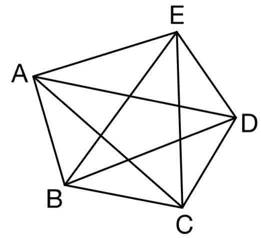
注：这里如果不查表，直接通过计算器计算，可能算出 0.5769，也算对。

8、正态随机变量 X 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，若 $P(X\geq 2)=a$，$P(0<X\leq 1)=1-3a$，则 $P(X\leq 0)=$ ___ $\frac{1}{4}$ ___

解析：$P(X\leq 0)=P(X\geq 2)=a$，所以由 $P(X\leq 0)+P(0<X\leq 1)=0.5$ 可以推出 $a+1-3a=0.5$，故 $a=\frac{1}{4}$

9、下图（图在下一页中）是 A,B,C,D,E 五个防区和连接这些防区的 10 条公路的示意图。已知每一个防区驻有一个部队。现在这五支部队都要换防，且换防时，每一支部队都

只能经过一条公路。假设每支部队向各个方向换防的概率均等，并称换防后每一个防区仍然只驻有一支部队是一种好的换防方式，则这五支部队的换防是好的的概率是 ___ $\frac{11}{256}$ ___



解析：假设现在 A, B, C, D, E 分别有军队 $1, 2, 3, 4, 5$。一个换防是好的，要求换防后 1 不在 A，2 不在 B，3 不在 C，4 不在 D，5 不在 E，可以使用错排公式进行计算，得到“好的”换防方式有 $5!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) = 44$ 种。

于是换防是好的的概率为 $\frac{44}{4^5} = \frac{11}{256}$

10、设 X, Y 相互独立，且服从同一分布，$\begin{cases} P(X=k) = \frac{1}{N+1}, & k = 0, 1, 2, \cdots, N, \\ P(Y=k) = \frac{1}{N+1}, & k = 0, 1, 2, \cdots, N. \end{cases}$，则 $Z = min(X, Y)$ 的概率分布是 ___ $P(Z=k) = \frac{2N-2k+1}{(N+1)^2},\ k = 0, 1, \cdots, N$ ___

解析：

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(X=k, Y>k) + P(X>k, Y=k) + P(X=k, Y=k) \\ &= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{N-k}{N+1} + \frac{N-k}{N+1} \cdot \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{N+1} \\ &= \frac{2N-2k+1}{(N+1)^2},\ k = 0, 1, \cdots, N \end{aligned}$$

这里也可以回答分布函数 $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z < 0 \\ 1 - (\frac{N-[z]}{N+1})^2 & \text{if } 0 \le z \le N \\ 1 & \text{if } z > N \end{cases}$

2 解答题（共 60 分）

11、（5 分）设电影院里任何长为 t 的时间里到达的男性和女性的数量分别服从参数为 40λ 和 60λ 的泊松分布，且观众的到达互相独立。求到达的前三个观众有至少两个女性的概率。

由于观众的到达是独立的，故每个到达的观众是男性的概率是 $\frac{40\lambda}{40\lambda+60\lambda}=\frac{2}{5}$，是女性的概率是 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

故到达的前三个观众有至少两个女性的概率可以由有两个女性和三个都是女性相加，

为 $3\times\frac{2}{5}\times(\frac{3}{5})^2+(\frac{3}{5})^3=64.8\%$

12、（5 分）设两位学生解问题的时间独立地服从参数为 λ 的指数分布，求第一位学生所花的时间至少是第二位学生所花时间两倍的概率

设 X 是第一位学生所花的时间，Y 是第二位学生所花的时间

则 $f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2\cdot e^{-\lambda(x+y)} & \text{if } x>0,y>0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

所以

$$\begin{aligned}P(X\geq 2Y)&=\int_0^\infty(\int_{2y}^\infty\lambda^2\cdot e^{-\lambda(x+y)}dx)dy\\&=\int_0^\infty\lambda\cdot e^{-3\lambda y}dy\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

13、（15 分）设随机变量 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}A\cdot cosx & \text{if } |x|\leq\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{if } |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

求：（1）常数 A；（2）X 落在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 内的概率；（3）分布函数 $F(x)$

（1）运用 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，可以得出 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}Acosxdx=2A=1$，故 $A=\frac{1}{2}$

（2）$P(0<X<\frac{\pi}{4})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}cosxdx=\frac{\sqrt{2}}{4}$

（3）$F(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x<-\frac{\pi}{2}\\ \frac{sinx+1}{2} & \text{if } -\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & \text{if } x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$

14、(10 分) 设 X, Y 服从标准正态分布，求

(1) $U = 2|X|$ 的分布

(2) $V = \frac{(X-Y)^2}{2}$ 的分布

(1) 由对称性，不妨设 $X = \frac{U}{2}$，则在 $u \geq 0$ 时，有 $f_U(u) = 2f_X(x) \cdot \frac{dX}{dU} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{8}}$

得到 U 的分布为 $f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{8}} & \text{if } u \geq 0 \\ 0 & \text{if } u < 0 \end{cases}$

(2) 第一步，可以得到 $X - Y \sim N(0, 2)$，

第二步，考虑变量变换，上课时有讲述过平方变换的结论如下

若 $X : f_X(x)$，而 $Y = c \cdot X^2$，会有：$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{cy}}(f_X(\sqrt{\frac{y}{c}}) + f_X(-\sqrt{\frac{y}{c}})) & \text{if } y > 0 \\ 0 & \text{if } y \leq 0 \end{cases}$

本题中，运用这两步便可计算出，$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}v^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{v}{2}} & \text{if } v > 0 \\ 0 & \text{if } v \leq 0 \end{cases}$

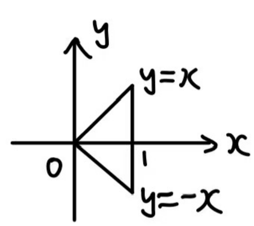
15、(15 分) 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |y| < x,\ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(1) 求 $f_X(x), f_Y(y)$；判断随机变量 X 与 Y 是否独立并说明理由

(2) 求条件密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$

(3) 求 $P(X^2 + Y^2 < 1)$

首先，画出 f(x,y) 如下：



得到：$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$,

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-y & \text{if } 0<y<1\\ 1+y & \text{if } -1\le y<0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

根据 $f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$ 容易知道，X 与 Y 不独立

（2） $f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-y} & \text{if } 0<y<1,\ |y|<x<1\\ \frac{1}{1+y} & \text{if } -1<y<0,\ |y|<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

（3） $P(X^2+Y^2<1)=\frac{\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2}{1^2}=\frac{\pi}{4}$

16、(10 分)设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P(X=i)=\frac{1}{3}\ (i=-1,0,1)$,

Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1 & \text{if } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$

（1） 求 $P(Z\le\frac{1}{2}\mid X=0)$

（2） 求 Z 的概率密度

（1） $P(Z\le\frac{1}{2}\mid X=0)=P(X+Y\le\frac{1}{2}\mid X=0)=P(Y\le\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

（2）

$$\begin{aligned}F(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)&\\ &=\sum_{i=-1,0,1}P(X+Y\le Z\mid X=i)\cdot P(X=i)\\ &=\begin{cases}0 & \text{if } z<-1\\ \frac{1}{3}(z+1) & \text{if } -1\le z<2\\ 1 & \text{if } x\ge 2\end{cases}\end{aligned}$$

故有 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \text{if } -1\le z<2\\ 0 & \text{else}\end{cases}$