2023 计算机学院概率论与数理统计期中考试

本卷可以使用没有存储功能的计算器

查表值：对于 $X \sim Poisson(3)$，$P(X \geq 1) = 0.9501$，$P(X \geq 2) = 0.8009$，$P(X \geq 3) = 0.5768$，$P(X \geq 4) = 0.3528$

1 填空题（每题 4 分，共 40 分）

1、设 A, B 是两事件，若有：$P(A-B) = 0.2$，$P(B-A) = 0.1$，$P(\overline{A \cup B}) = 0.3$，则 $P(AB) =$ ____________

2、设一袋中有 4 个白球和 5 个红球，从中不放回地随机抽取 4 个，问：出现 2 个白球 2 个红球的概率是 ____________

3、在线段 AB 上取点 C, D, E，使得 AC, AD, AE 的长能构成一个三角形的概率为 ____________

4、一学生参加选择题的测验，每一题有 5 个答案，其中只有一个答案是正确的。如果此学生明白如何解题，则他必选正确答案，否则的话他随机地在 5 个可能答案中任选 1 个。假定该学生能明白无误地解出 70 % 的试题。若此学生已选定的某题的答案是正确的，则他明白该题如何解答的概率是 ____________

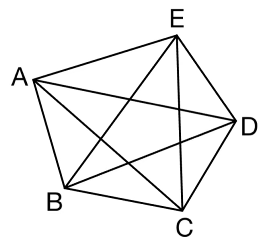
5、设随机变量 $A \sim U[-1, 9]$。则关于 y 的方程 $y^2 + 3Ay + 1 = 0$ 有两个实根的概率是 ____________

6、抛 5 枚均匀的硬币，设 X 表示其中正面朝上的硬币的个数，则满足 $P(X < n) \geq 0.8$ 的 n 的最小值是 ____________

7、某单位订购 1000 只灯泡，在运输途中，灯泡被打破的概率为 0.003，设 X 为收到灯泡时被打破的灯泡数。试求 $P(X > 2) =$ ____________（保留 4 位有效数字）

8、正态随机变量 X 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$，若 $P(X \geq 2) = a$，$P(0 < X \leq 1) = 1 - 3a$，则 $P(X \leq 0) =$ ____________

9、下图（图在下一页中）是 A,B,C,D,E 五个防区和连接这些防区的 10 条公路的示意图。已知每一个防区驻有一个部队。现在这五支部队都要换防，且换防时，每一支部队都只能经过一条公路。假设每支部队向各个方向换防的概率均等，并称换防后每一个防区仍然只驻有一支部队是一种好的换防方式，则这五支部队的换防是好的的概率是 __________



10、设 X,Y 相互独立，且服从同一分布，$\begin{cases} P(X=k)=\frac{1}{N+1}, & k=0,1,2,\cdots,N, \\ P(Y=k)=\frac{1}{N+1}, & k=0,1,2,\cdots,N. \end{cases}$，则 $Z=min(X,Y)$ 的概率分布是 __________

2 解答题（共 60 分）

11、（5 分）设电影院里任何长为 t 的时间里到达的男性和女性的数量分别服从参数为 40λ 和 60λ 的泊松分布，且观众的到达互相独立。求到达的前三个观众有至少两个女性的概率。

12、（5 分）设两位学生解问题的时间独立地服从参数为 λ 的指数分布，求第一位学生所花的时间至少是第二位学生所花时间两倍的概率

13、（15 分）设随机变量 X 的概率密度为：$f(x) = \begin{cases} A \cdot cosx & \text{if } |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{if } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

求：（1）常数 A；（2）X 落在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内的概率；（3）分布函数 $F(x)$

14、（10 分）设 X, Y 服从标准正态分布，求

（1）$U = 2\,|X|$ 的分布

（2）$V = \frac{(X-Y)^2}{2}$ 的分布

15、(15 分)设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{if } |y|<x,\ \ 0<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

（1）求 $f_X(x), f_Y(y)$；判断随机变量 X 与 Y 是否独立并说明理由

（2）求条件密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$

（3）求 $P(X^2+Y^2<1)$

16、(10 分)设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P(X=i)=\frac{1}{3}\ \ (i=-1,0,1)$,

Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1 & \text{if } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$

（1）求 $P(Z\le\frac{1}{2}\mid X=0)$

（2）求 Z 的概率密度