2014年《线性代数》期中试题

考试时间: 90 分钟　2014年11月

学号: ________ 姓名: ________ 成绩: ________

题号	一(20)	二(40)	三(12)	四(8)	五(12)	六(8)	总分
得分							

一. 判断下列命题是否正确(每小题2分,总计20分)

(1) [×] $\mathbf{A}$ 为 n 阶实反对称矩阵, 则 $\det(\mathbf{A}) = 0$.

(2) [√] 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 则矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BC} \end{bmatrix}$ 的行列式为 $(-1)^{mn}\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

(3) [√] 矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶方阵, $\det(\mathbf{AB}) = 0$ 当且仅当 $\det(\mathbf{A}) = 0$ 或 $\det(\mathbf{B}) = 0$.

(4) [√] 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式不为零, $\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\det((\mathbf{A}^*)^*) = \det(\mathbf{A})^{(n-1)^2}$.

(5) [×] 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶实对称阵, 则 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{AB}$ 也是实对称阵.

(6) [√] 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆, 其逆阵记为 $\mathbf{A}^{-1}$, 若交换矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 和 $j(i \neq j)$ 列后矩阵记为 $\mathbf{A}_{ij}$, 则 $\mathbf{A}_{ij}$ 的逆阵等于将 $\mathbf{A}^{-1}$ 交换第 i 和 j 行.

(7) [×] $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 均为 n 阶方阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

(8) [×] 设 $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ 和 $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r\}$ 分别是 $m \times 1$ 和 $n \times 1$ 的两组向量, 而且向量组 A 和 B 各自线性相关, 则 $(m+n)\times 1$ 的向量组 $C = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r \\ \mathbf{b}_r \end{bmatrix} \right\}$ 必线性相关.

(9) [×] 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 与非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 相应的齐次线性方程组为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, 若 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 不相容, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解.

(10) [√] 设 $\mathbf{A}$ 为任意 $m \times n$ 矩阵, 且$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = r$, 则 $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = r$.

二. 选择题(每小题4分,总计40分)

(1) 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = x$, $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = y$, 则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$ 为 <u>D</u>.

A. $x+y$　B. $-(x+y)$　C. $y-x$　D. $x-y$　E. A—D均不正确

(2) 设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\mathbf{A}^*$ 中的第 1 行第2 列元素是 <u>A</u>.

A. 6　B. -2　C. -6　D. 2

(3) 设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$, 若 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 1$, 则 a 为 <u>B</u>.

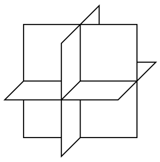
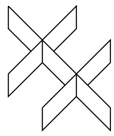
A. 2　B. 1　C. 4　D. 3

(4) 已知 α_1, α_2 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两个不同的解, β_1, β_2 是对应齐次线性方程组的 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 下列选项中哪个是方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的(一般)解形式 $\underline{\ \text{D}\ \ }$.

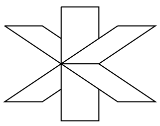
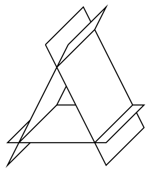
A. $\alpha_1 + k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\beta_1 - \beta_2)$　　B. $\dfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\beta_1 + \beta_2)$

C. $\dfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2\beta_1 + k_3(\beta_1 + \beta_2)$　　D. $\dfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + k_1\beta_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2)$

(5) 设有三张不同平面的方程$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i (i = 1, 2, 3)$, 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2, 则这三张平面可能的位置关系为下列中的哪个 $\underline{\ \text{C}\ \ }$.

A. 三个平面只有一个公共点　B. 三个平面中仅有两个平面平行

C. 三个平面交于一直线　　　D. 三个平面两两交于一直线

(6) 设 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ 分别为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{C}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{C}^*$ 为 $\underline{\ \text{D}\ \ }$.

A. $\begin{bmatrix} \det(\mathbf{A})\,\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \det(\mathbf{B})\,\mathbf{B}^* \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} \det(\mathbf{B})\,\mathbf{B}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \det(\mathbf{A})\,\mathbf{A}^* \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} \det(\mathbf{A})\,\mathbf{B}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \det(\mathbf{B})\,\mathbf{A}^* \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} \det(\mathbf{B})\,\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \det(\mathbf{A})\,\mathbf{B}^* \end{bmatrix}$

(7) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 若 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1, 则必有 $\underline{\ \text{A}\ \ }$.

A. $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$　B. $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$

C. $a = b$ 或 $a + 2b = 0$　D. $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$

(8) 设方阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times 3}$ 满足 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$, 若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数, 则 a_{11} 为 $\underline{\ \text{B}\ \ }$.

A. 3　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\dfrac{1}{3}$　D. 3

(9) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为 $n \times 1$ 的列向量组, $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 则下列那个选项是正确的 $\underline{\ \text{C}\ \ }$.

A. 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关, 则 $\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, \ldots, \mathbf{A}\alpha_n$ 线性相关.

B. 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关, 则 $\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, \ldots, \mathbf{A}\alpha_n$ 线性无关.

C. 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关, 则 $\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, \ldots, \mathbf{A}\alpha_n$ 线性相关.

D. 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关, 则 $\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, \ldots, \mathbf{A}\alpha_n$ 线性无关.

(10) 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 满足 $\mathbf{ABC} = \mathbf{I}$($\mathbf{I}$ 为单位阵), 则必有 $\underline{\ \text{D}\ \ }$.

A. $\mathbf{ACB} = \mathbf{I}$　B. $\mathbf{CBA} = \mathbf{I}$　C. $\mathbf{BAC} = \mathbf{I}$　D. $\mathbf{BCA} = \mathbf{I}$

三. (12分) 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & a^2 & 2a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{bmatrix}$.

(a) 求 $\det(\mathbf{A})$.

(b) 若方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解, a 应该如何取值, 其中 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$.

(c) 求方程组的解.

解: (a) 按第 1 行展开, $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}\Rightarrow D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$, 令 $\triangle_n=D_n-aD_{n-1}$, 得

$$\triangle_n=a\triangle_{n-1}\Rightarrow\triangle_n=a^{n-2}\triangle_2$$

而 $\triangle_2=D_2-aD_1=3a^2-2a^2=a^2$, 所以 $D_n-aD_{n-1}=a^n$

$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1}+a^n=a(aD_{n-2}+a^{n-1})+a^n \\ &= a^2D_{n-2}+2a^n=\cdots=a^{n-2}D_2+(n-2)a^n=(n+1)a^n \end{aligned}$$

(b) 当 $a\neq 0$ 时, $\det(\mathbf{A})\neq 0$.

(c) 利用 Gram 法则,

$$x_i=\frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}$$

其中, $\mathbf{A}_i$ 是用 $\mathbf{b}$ 代替 $\mathbf{A}$ 中的第 i 列.

$$\det(\mathbf{A}_i)=\det\begin{bmatrix} 2a & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 2a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}=(-1)^{i+1}a^{2(i-1)}D_{n-i}=(-1)^{i+1}(n-i+1)a^{n+i-2}$$

因此

$$x_i=\frac{(-1)^{i+1}(n-i+1)a^{n+i-2}}{(n+1)a^n}=\frac{(-1)^{i+1}(n-i+1)a^{i-2}}{n+1}$$

四. (8分) 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶可逆方阵, $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 为 $n\times 1$ 向量, 证明: 若 $\mathbf{y}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\neq 1$, 则矩阵 $\mathbf{A}+\mathbf{xy}^T$ 可逆, 且

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{xy}^T\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{xy}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{y}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}}$$

证明: 仅需验证

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{xy}^T\right)\left(\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{xy}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{y}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}}\right)=\mathbf{I}$$

五. (12分) 方程组

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & tx_3 & = & -1 \\ 7x_1 & & & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

有三个不同的解向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(a) 确定参数 t 的值.

(b) 证明: $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 线性相关.

解: (a) 因有三个不同解, 所以系数增广矩阵的秩小于 3.

六. (8分) 解矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$