装订线内不要答题

2016–2017 学年第一学期 << 线性代数 >> 期中考试试卷

课程代码: COMP120004　　　　共 4 页

(本试卷答题时间 90 分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

班级: ______________ 学号: ______________ 姓名: ______________ 成绩: ________

题号	一	二	三 (1)	三 (2)	三 (3)	三 (4)	三 (5)	总成绩
得分								

一、选择题 (单选题每小题 2 分, 总计 20 分)

①. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}+\mathbf{I}_n=\mathbf{0}$, 则 $\mathbf{A}^{-1}=$[c]

a. $-\mathbf{I}_n$　　b. $\mathbf{A}+2\mathbf{I}_n$　　c. $-\mathbf{A}-2\mathbf{I}_n$　　d. $-\frac{1}{2}\mathbf{A}-\mathbf{I}$

②. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\d\\d^2\end{bmatrix}$, 集合 $\Omega=\{1,2\}$, 线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有无穷多解的充要条件是:[d]

a. $a\notin\Omega, d\notin\Omega$　　b. $a\notin\Omega, d\in\Omega$　　c. $a\in\Omega, d\notin\Omega$　　d. $a\in\Omega, d\in\Omega$

③. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$ 成立的充要条件是[　]a

a. $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$　　b. $\mathbf{A}=\mathbf{I}$　　c. $\mathbf{B}=\mathbf{I}$　　d. $\mathbf{A}=\mathbf{B}$

④. 5 阶行列式中 $a_{21}a_{54}a_{13}a_{32}a_{45}$ 和 $a_{32}a_{44}a_{25}a_{51}a_{13}$ 两项应带有的符号依次为:[c]

a. $+,+$　　b. $+,-$　　c. $-,-$　　d. $-,+$

⑤. 下列 $n(n>2)$ 阶行列式的值必为零的是:[b]

a. 行列式主对角线上的元素全为零　　b. 上 (下) 三角阵行列式主对角线上有一个元素为零
c. 行列式零的元素的个数多于 n 个　　d. 行列式中非零元素的个数小于等于 n 个

⑥. 方程 $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&3&4\\x^2&9&16\end{vmatrix}$ 根的个数是[c]

a. 0　　b. 1　　c. 2　　d. 3

⑦. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 线性无关, 则下列哪个向量组必线性无关:[a]

a. $\begin{bmatrix}\alpha_1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\alpha_2\\1\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}\alpha_k\\1\end{bmatrix}$

b. $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_2,\cdots,\alpha_k-\alpha_{k-1},\alpha_1-\alpha_k$

c. $2\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3, 2\alpha_3-\alpha_2-\alpha 4,\ldots,2\alpha_k-\alpha_{k-1}-\alpha_1, 2\alpha_1-\alpha_k-\alpha_2$

d. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\ldots,\alpha_{k-1}+(-1)^k\alpha_k,\alpha_k-\alpha_1$

⑧. 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 则下列式子中一定正确的是:[c]

a. $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{I}_n$　　b. $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$

c. $\mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}^*\right)^T = \mathbf{I}_n$　　d. $\det\left(\mathbf{A}^*\right) = 1$

⑨. 设向量 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 均为方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解. 则 $\mathbf{A}$ 可能是下列哪个矩阵:[c]

a. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$　　b. $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$　　d. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

⑩. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathbf{b}$ 是 n 维列向量, 若 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$, 则[d]

a. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 必有无穷多解;　　b. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解;

c. $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 只有零解;　　d. $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 有非零解

二. 填空题 (每空 3 分, 总计 30 分)

①. 已知 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $\det(\mathbf{A}) = \dfrac{1}{2}$, 则 $\det\left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^*\right) = \underline{\dfrac{3^n}{2^{n-1}}}$.

②. 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的 n 次方幂, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \underline{\begin{bmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

③. 已知 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 r, 则齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中有 $\underline{n-r\text{ 个}}$ 线性无关的向量.

④. 当 a $\underline{= 2}$ 时, 线性方程组

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & a+1 \\ -x_1 & - & 11x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = & -4 \end{array}$$

有解, 有解时写出它的一个特解 $\underline{\left[-1, \dfrac{5}{16}, 0, 0\right]^T \text{(其它满足方程的特解均正确)}}$.

写出它导出方程组的基础解系: $\underline{[3, 7, 16, 0]、[9, 5, 0, 16]}$.

⑤. 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n - 1$, $\mathbf{A}^*$ 为它的伴随矩阵, 则方程组 $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系包含 $\underline{n-1}$ 个线性无关的向量.

⑥. 设 α_1、α_2、α_3、β_1、β_2 为 4 维向量, 设矩阵 $\mathbf{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1]$、$\mathbf{B}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2]$, 及 $\det(\mathbf{A})=-4$、$\det(\mathbf{B})=-1$, 则 $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})=$ <u>-40</u>.

⑦. 设 $\alpha=[x,0,0,\cdots,0,x]^T$ 为 n 维向量, 已知矩阵 $\mathbf{A}=\mathbf{I}_n-\alpha\alpha^T$ 且 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}+\frac{1}{x}\alpha\alpha^T$, 则 $x=$ <u>$\frac{1}{2}$、-1</u>.

⑧. 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$、$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$, 向量 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{Ab}$ 线性无关, 则 $a\neq$ <u>-1</u>.

三. 计算、证明题

①. [10 分] 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\mathbf{AA}^T=\mathbf{I}$, 且 $\det(\mathbf{A})=-1$, 求 $\det(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ (写出推导过程).

解:

$$\begin{aligned}
\because\ & \mathbf{AA}^T=\mathbf{I},\quad \mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T,\\
& \det(\mathbf{I}+\mathbf{A})=\det\left(AA^{-1}+\mathbf{A}\right)=\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{I})=-\det(\mathbf{A}^T+\mathbf{I})\\
& (\mathbf{I}+\mathbf{A})^T=\mathbf{I}+\mathbf{A}^T\\
\Rightarrow\ & \det(\mathbf{I}+\mathbf{A})=\det\left((\mathbf{I}+\mathbf{A})^T\right)=\det\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}^T\right)=-\det(\mathbf{I}+\mathbf{A})\\
\therefore\ & \det(\mathbf{I}+\mathbf{A})=0
\end{aligned}$$

②. [10 分] 设 $\mathbf{A}$ 为 $n(\geq 2)$ 阶方阵, 证明:

a. 当 $n\geq 3$ 时, $(\mathbf{A}^*)^*=\det(\mathbf{A})^{n-2}\mathbf{A}$.

b. 当 $n=2$ 时, $(\mathbf{A}^*)^*=\mathbf{A}$.

($\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵.)

证:

a.

$$\mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}^*\right)^*=\det\left(\mathbf{A}^*\right)\mathbf{I}$$

等式两端同左乘 $\mathbf{A}$ 得:

$$\mathbf{AA}^*\left(\mathbf{A}^*\right)^*=\det(\mathbf{A})\left(\mathbf{A}^*\right)^*=\det(\mathbf{A}^*)\mathbf{A}\tag{1}$$

再根据 $\mathbf{AA}^*=\det(\mathbf{A})\mathbf{I}$ 两端求行列式得

$$\det(\mathbf{A})\det\left(\mathbf{A}^*\right)=\det(\mathbf{A})^n\Rightarrow\det\left(\mathbf{A}^*\right)=\det(\mathbf{A})^{n-1}$$

代入 (1) 式, 得 $(\mathbf{A}^*)^*=\det(\mathbf{A})^{n-2}\mathbf{A}$.

b. 当 $n=2$ 时, 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 则各元素对应的代数余子式为: $A_{11}=d$、$A_{12}=-c$、$A_{21}=-b$、$A_{22}=a$, 因此 $\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$.

再求 $\mathbf{A}^*$ 的伴随矩阵 $(\mathbf{A}^*)^*$, 根据定义求得 $(\mathbf{A}^*)^*$ 各元素的代数余子式为: $A'_{11}=a$、$A'_{12}=c$、$A'_{21}=b$、$A'_{22}=d$, 因此 $(\mathbf{A}^*)^*=\mathbf{A}$.

③. [8 分] 设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 分别为 $m\times s$ 和 $m\times t$ 矩阵, 证明: $\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) \geq \max\left\{\mathrm{rank}(\mathbf{A}), \mathrm{rank}(\mathbf{B})\right\}$.

证: 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_t \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_t & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_t \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}(\mathbf{A})$ 等于向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ 的秩, $\mathrm{rank}(\mathbf{B})$ 等于向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_t$ 的秩, 同样 $\mathrm{rank}\left([\mathbf{A}, \mathbf{B}]\right)$ 等于向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_t$ 的秩, 显然有 $\mathrm{rank}\left([\mathbf{A}, \mathbf{B}]\right) \geq \mathrm{rank}(\mathbf{A})$ 和 $\mathrm{rank}\left([\mathbf{A}, \mathbf{B}]\right) \geq \mathrm{rank}(\mathbf{B})$, 因此, $\mathrm{rank}\left([\mathbf{A}, \mathbf{B}]\right) \geq \max\left\{\mathrm{rank}(\mathbf{A}), \mathrm{rank}(\mathbf{B})\right\}$.

④. [10 分] 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & x_6^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 & x_6^4 \\ x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 & x_5^6 & x_6^6 \end{vmatrix}$$

解: 原行列式记为 Δ_6, 将它扩充成 7×7 行列式记为 $\tilde{\Delta}_7$, 即:

$$\tilde{\Delta}_7 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 & y^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & x_6^3 & y^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 & x_6^4 & y^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 & x_6^5 & y^5 \\ x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 & x_5^6 & x_6^6 & y^6 \end{vmatrix}$$

$\tilde{\Delta}_7$ 的第 6 行第 7 列元素 y^5 对应的余子式就是 Δ_6, 而 $\tilde{\Delta}_7$ 是标准的 Vandermonde 行列式, 因此 $\tilde{\Delta}_7$ 为:

$$\tilde{\Delta}_7 = (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_6)\prod_{1\leq i<j\leq 6}(x_j - x_i)$$

将它视作关于 y 的多项式, 其中 y^5 对应的系数为:

$$-\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)\prod_{1\leq i<j\leq 6}(x_j - x_i)$$

它是 $\tilde{\Delta}_7$ 中第 6 行第 7 列元素 y^5 对应的代数余子式, 因此

$$\Delta_6 = \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)\prod_{1\leq i<j\leq 6}(x_j - x_i)$$

⑤. [12 分] 解下列线性方程组:

$$\begin{array}{llllll} x_1 + & x_2 + x_3 + \cdots + x_n & & & = & 1 \\ & x_2 + x_3 + \cdots + x_n & + & x_{n+1} & = & 2 \\ & \cdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & x_{n+1} \quad + x_{n+2} + \cdots + x_{2n} & = & n+1 \end{array}$$

(a). 写出方程组的一个特解.

(b). 写出该方程组导出方程的基础解系.

(c). 写出方程组所有解的表达式.

解:

(a). 方程组对应的系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times 2n}$$

系数矩阵是阶梯形矩阵, 前 $n+1$ 列是主元列, 对应的前 $n+1$ 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ 是主元变量, 其他的变量 $x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}$ 是自由变量, 对增广矩阵实施初等行变换, 将它化成标准阶梯形:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n+1 \end{array}\right]_{(n+1)\times 2n}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,\ldots,n]{R_i - R_{n+1}} \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 1-n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n+1 \end{array}\right]_{(n+1)\times 2n}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{array}\right]_{(n+1)\times 2n}$$

最终特解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ n+1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b). 由 (a) 可知齐次方程组的解为 ($x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}$ 为自由变量):

$$\begin{aligned} x_{n+1} = &\ -x_{n+2} - x_{n+3} - \cdots - x_{2n} \\ x_n = &\ x_{2n} \\ \vdots & \\ x_2 = &\ x_{n+2} \\ x_1 = &\ -x_2 - x_3 - \cdots - x_n = -x_{n+2} - x_{n+3} - \cdots - x_{2n} \end{aligned}$$

所以, 基础解系为: $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{e}_{n+k+1} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{n+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), 其中 $\mathbf{e}_i$ 为 $2n \times 1$ 向量, 第 i 个元素为 1 的单位向量.

(c). 将上述特解记为 $\hat{\mathbf{x}}$, 则最终的解为:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \sum_{k=1}^{n-1} t_i \tilde{\mathbf{x}}_k = \sum_{k=1}^{n-1} t_k \left(\mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{e}_{n+k+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right) \left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{n+1}\right)$$

其中 $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ 是任意常数.