（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学试验班

2018-2019 第一学期《线性代数》期末考试试卷

A卷　共 9 页

课程代码：COMP120004.01-09　　考试形式：☐开卷　■闭卷

开课院系：计算机学院、信息学院　　2019 年 1 月

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一. (10 分)计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

解：1.若$a_i \neq 0$

$$A_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i})a_2\dots a_n$$

2.若存在一个$a_i=0$

$$A_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1\dots a_{i-1}a_{i+1}\dots a_n$$

3.若存在两个以上$a_i=0$,则行列式值为0.

（装订线内不要答题）

二、(10 分) 求解线性方程组:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 \quad\; = 1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+\ x_3-\ x_4-x_5=\ 3 \\ x_1-4x_2+\ x_3+\ x_4-x_5=\ 3 \\ x_1+2x_2+\ x_3-\ x_4+x_5=-1 \end{cases}$$

解：增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基础解系为$(1,1,0,1,-2)^T$,特解为$(0,-1,0,-1,0)^T$,通解为
$k(1,1,0,1,-2)^T+(0,-1,0,-1,0)^T$

三、（10 分）若 n 阶方阵 A 的所有特征值的绝对值都小于 1，即$|\lambda_i|<1, i=1,2,\cdots n$，

请证明$E-A$可逆，其中E为 n 阶单位矩阵。

证：先证明$E-A$的特征值为$1-\lambda_i$

若方阵 A 特征值λ_i对应的特征向量为v_i

则$Av_i=\lambda_i v_i$

$$(E-A)v_i=v_i-Av_i=v_i-\lambda_i v_i=(1-\lambda_i)v_i$$

所以，$E-A$的特征值为$1-\lambda_i$

又$|\lambda_i|<1$,得$0<1-\lambda_i<2$

若$E-A$不可逆，则其含有特征值 0

这与$0<1-\lambda_i<2$矛盾

所以，$E-A$可逆

（装订线内不要答题）

四、（12 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2-x_2{}^2+ax_3{}^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1{}^2+\lambda_2 y_2{}^2$，求 a 的值及正交矩阵 Q，并写出它的规范形。

解：二次型对应矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{bmatrix}$$

其在正交变换$X=QY$下的标准形为$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2$，说明其含有特征值0.

则$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 4+a\\ 0 & 0 & a-2\end{vmatrix}=3(2-a)=0$

$a=2$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$$

$\lambda=0,-3,6$

1.$\lambda=0$

$$[\lambda I-A]=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

特征向量为$(1,2,1)^T$,标准化为$(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T$

2.$\lambda=-3$

$$[\lambda I-A]=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

特征向量为$(-1,1,-1)^T$,标准化为$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})^T$

3.$\lambda=6$

$$[\lambda I-A]=\begin{bmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -7 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

特征向量为$(1,0,-1)^T$,标准化为$(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

所以，正交矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

五、(12 分) 设 A,B 均为 n 阶方阵，证明下列结论:

（1）$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$

⑵ 若 $AB=0$，则 $rank(A)+rank(B)\le n$

证：(1) $r(A)+r(B)=r(\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix})=r(\begin{bmatrix}A & B\\ O & B\end{bmatrix})=r(\begin{bmatrix}A+B & B\\ B & B\end{bmatrix})\ge r(A+B)$

(2) 先证明$r(A)+r(B)\le r(AB)+n$

$$r(AB)+n=r(\begin{bmatrix}AB & O\\ O & I_n\end{bmatrix})=r(\begin{bmatrix}AB & A\\ O & I_n\end{bmatrix})=r(\begin{bmatrix}O & A\\ -B & I_n\end{bmatrix})=r(\begin{bmatrix}B & -I_n\\ O & A\end{bmatrix})$$

$$\ge r(A)+r(B)$$

$AB=O$,则$r(AB)=0$

即$r(A)+r(B)\le n$

（装订线内不要答题）

六、（10 分）向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是 $AX=0$ 的解，即 $A\beta\neq 0$。向量组 $\beta,\ \beta+\alpha_1,\ \beta+\alpha_2,\cdots,\ \beta+\alpha_t$ 是否线性相关？并说明理由。

证：$A\beta\neq 0$，则 β 不能由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t$ 线性表出
又向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t$ 线性无关
所以，向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t$ 线性无关
令 $k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\ldots+k_t(\beta+\alpha_t)=0$

$$(k_0+k_1+k_2+\ldots+k_t)\beta+k_1\alpha_1+\ldots+k_t\alpha_t=0$$

而向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t$ 线性无关
所以，

$$k_0+k_1+k_2+\ldots+k_t=0,k_1=0,\ldots,k_t=0$$
$$k_0=k_1=\ldots=k_t=0$$

向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\ldots,\beta+\alpha_t$ 线性无关

七、(14 分)函数集合$V_3=\{f(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x \mid a_0,a_1,a_2\in R\}$。

(1) 求证V_3对函数的通常加法和数乘构成三维线性空间，且 $f_1=e^x, f_2=xe^x, f_3=x^2e^x$, 构成$V_3$的一组基。

(2) 显然$Tf(x)=f'(x)$是V_3的一个线性变换，求该变换在基 f_1,f_2,f_3下对应的矩阵，并求该线性变换T的特征值与特征向量。

（第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分）

证：(1)交换律，结合律易验证

0 元为$f(x)=0$

负元为$-(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x$

$1*(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x=(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x$

$k(l(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x)=(kl)(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x$

$(k+l)(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x=k(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x+l(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x$

$$k((a_0+a_1x+a_2x^2)e^x+(b_0+b_1x+b_2x^2)e^x)$$
$$=k(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x+k(b_0+b_1x+b_2x^2)e^x$$

所以,V_3为线性空间

$$f(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2)e^x=a_0e^x+a_1xe^x+a_2x^2e^x$$

所以，$f_1=e^x,f_2=xe^x,f_3=x^2e^x$构成$V3$的一组基

(2) $Tf_1=e^x,Tf_2=(x+1)e^x,Tf_3=(x^2+2x)e^x$

$$T(f_1,f_2,f_3)=(e^x,(x+1)e^x,(x^2+2x)e^x)=(f_1,f_1+f_2,2f_2+f_3)$$
$$=(f_1,f_2,f_3)\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$$

$\lambda=1$

$(I-A)x=0$基础解系为$(1,0,0)^T$

T的特征值为1,特征向量为$k(1,0,0)^T$

（装订线内不要答题）

八、（10 分）求正交矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ 为对角阵，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$$

解：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$

1.$\lambda_1=\lambda_2=1$

$$[I-A]=\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到基础解系为$(0,1,1)^T,(-4,1,-1)^T$

标准化为$(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T,(-\frac{4}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{1}{3\sqrt{2}})^T$

2.$\lambda_3=10$

$$[10I-A]=\begin{bmatrix}9&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&-1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到基础解系为$(-1,-2,2)^T$

标准化为$(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

注意到向量组已经正交化，所以

$$P=\begin{bmatrix}0&-\frac{4}{3\sqrt{2}}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix},P^TAP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{bmatrix}$$

九、设V为数域F上的线性空间，W_1,W_2均为V的子空间。试证明：

（1）$W_1\cup W_2$为V的子空间当且仅当$W_1\subseteq W_2$或$W_2\subseteq W_1$。

（2）试求V中包含$W_1\cup W_2$的最小子空间。　（共 12 分，每小题 6 分）

证：(1)充分性：$W_1\subseteq W_2$，则$W_1\cup W_2=W_2$
所以，$W_1\cup W_2$为V的子空间
$W_2\subseteq W_1$同理可证
必要性：假设W_1不是W_2的子集，且W_2不是W_1的子集
则存在向量$a\in W_2$,且$a\notin W_1$
存在向量$b\in W_1$,且$b\notin W_2$
若$a+b\in W_2$,则$b=(a+b)-a\in W_2$,矛盾
若$a+b\in W_1$,则$a=(a+b)-b\in W_1$,矛盾
所以,$a+b\notin W_1$,且$a+b\notin W_2$,即$a+b\notin W_1\cup W_2$,这与$W_1\cup W_2$为V的子空间相矛盾.
所以，$W_1\subseteq W_2$或$W_2\subseteq W_1$
(2)包含$W_1\cup W_2$的最小子空间为W_1+W_2
对于任意包含$W_1\cup W_2$的子空间Y
若$w_1+w_2\in W_1+W_2(w_1\in W_1,w_2\in W_2)$
由加法封闭性得$w_1+w_2\in Y$
所以，$W_1+W_2\subset Y$
即，W_1+W_2为包含$W_1\cup W_2$得最小子空间