

2020 年春季学期课程期末考试试卷答题纸

课程名称: 线性代数

课程代码: SOFT130079.01

卷 别: A 卷 B 卷 C 卷

姓 名: _____ 学 号: _____

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）：

年 月 日

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 | | | | | | | | | |

0 -1 1 3

计算题:

1、已知 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $(A^{-1})^{100}$

2、计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

3、设 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- (1) 求 A 的特征值和特征向量;
(2) 判断 A 是否可对角化? 如果可以对角化, 求出可逆变换矩阵 P。

4、已知 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{bmatrix}$, 求 $AX=0$ 的通解

5、矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, 求 A 的行向量组的一个最大无关组。

6、讨论当参数 a, b 取何值时, 下列的方程组无解? 有唯一解? 有无穷多组解? 并求有无穷多组解时方程组的通解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \\ -x_2 + (a-2)x_3 - 2x_4 = b \end{cases}$$

7、设 A 为 3 阶矩阵, 向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 分别是 A 的特征值 -1 和 1 对应的特征向量, 而向量 \mathbf{c} 满足 $\mathbf{Ac} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, 讨论向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的线性无关性。

8、讨论方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$ 有解的条件, 并求对应的通解。

证明题:

9、设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为方阵 A 的不同的特征值, 对应的特征向量分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 假设 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 证明向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关。