复旦大学信息科学与工程学院

《线性代数》期中考试试卷

共 8 页

课程代码：COMP120004.08　　**考试形式：□开卷　☑闭卷**　　2021 年 11 月

（本试卷答卷时间为 100 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业__________学号________姓名________成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

（装订线内不要答题）

1. 若 $x=[1,-2,1,0]^T$，$y=[0,1,-2,1]^T$，求 x^Ty、xy^T 与 $(xy^T)^5$ 的结果，要求有计算过程。（10 分）

2. 讨论以下线性方程组当λ取不同值，解的情况（无解、唯一解、无穷多解），若有解请写出解集。（12 分）

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

3. 已知在常规矩阵加法和数乘规则下，所有 2×2 的矩阵构成的集合 $M^{2\times2}$ 为线性空间，

(1) 请证明所有 2×2 的对称矩阵（即转置不变的矩阵）构成的空间 $S^{2\times2}$ 为线性子空间；（4 分）

(2) 给出 $S^{2\times2}$ 的两组不同的基；（4 分）

(3) 计算这两组基之间的过渡矩阵；（4 分）

(4) 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 在这两组基下的展开系数。（4 分）

4. 请计算三维空间空间坐标为 $(1,-1,1)$ 的点 x 到矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的零空间 $N(A)$ 的距离，要求有具体步骤。（10 分）

5. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$，求两个零空间之和 $N(A)+N(B)$ 的基与维度。（10 分）

6. $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathrm{R}^4$ 为四个线性无关矢量，请证明 $\dim span\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1\} = 3$ 。（10 分）

7. 对于矩阵 $A_{m\times n}, B_{n\times s}, C_{s\times t}$，请证明 Frobenius 不等式，

$$rank(ABC) \geq rank(AB) + rank(BC) - rank(B)$$。（10 分）

证：

8. 如果 W 是线性空间 V 的线性子空间，请证明，

(1) W 的零元即为 V 中的零元，(2 分)

(2) 若 $\dim W = \dim V$，则 $W = V$。（8 分）

9. W 是线性空间 V 的线性子空间，已知 $\dim V = n > \dim W = r$，若给定 W 的一组基 $\{w_1, w_2, \cdots, w_r\}$，请证明一定可以在 $V \setminus W$ 中找到 $n-r$ 个线性无关矢量 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-r}\}$，与 $\{w_1, w_2, \cdots, w_r\}$ 共同构成 V 的基。（12 分）