1. 若$x=[1,-2,1,0]^T$，$y=[0,1,-2,1]^T$，求$x^T y$、xy^T与$(xy^T)^5$的结果，要求有计算过程。（10分）

2. 讨论以下线性方程组当λ取不同值，解的情况（无解、唯一解、无穷多解），若有解请写出解集。（12分）

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1-\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2-\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

3. 已知在常规矩阵加法和数乘规则下，所有2×2的矩阵构成的集合$M^{2\times2}$为线性空间，

(1) 请证明所有2×2的对称矩阵（即转置不变的矩阵）构成的空间$S^{2\times2}$为线性子空间；（4分）

(2) 给出$S^{2\times2}$的两组不同的基；（4分）

(3) 计算这两组基之间的过渡矩阵；（4分）

(4) 计算矩阵$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$在这两组基下的展开系数。（4分）

4. 请计算三维空间空间坐标为$(1,-1,1)$的点 x 到矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$的零空间$N(A)$的距离，要求有具体步骤。（10分）

5. $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，求两个零空间之和$N(A)+N(B)$的基与维度。（10分）

6. $v_1,v_2,v_3,v_4\in \mathrm{R}^4$ 为四个线性无关矢量，请证明 $\dim span\{v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4-v_1\}=3$。（10分）

7. 对于矩阵$A_{m\times n},B_{n\times s},C_{s\times t}$，请证明 Frobenius 不等式，

$rank(ABC)\geq rank(AB)+rank(BC)-rank(B)$。（10分）

8. 如果W是线性空间V的线性子空间，请证明，

(1) W的零元即为V中的零元，（2分）

(2) 若$\dim W=\dim V$，则$W=V$。（8分）

9. W是线性空间 V 的线性子空间，已知$\dim V=n>\dim W=r$，若给定 W 的一组基$\{w_1,w_2,\cdots,w_r\}$，请证明一定可以在$V\setminus W$中找到$n-r$个线性无关矢量$\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-r}\}$，与$\{w_1,w_2,\cdots,w_r\}$共同构成$V$的基。（12分）