（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学试验班

2022-2023 第一学期《线性代数》期末考试试卷

A 卷　　　　　　　　2023 年 1 月 5 日

课程名称：《线性代数》　课程代码：COMP120004.01-10

开课院系：计算机科学技术学院、信息科学与工程学院　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、（12 分）$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}, AX=2X+A,$ 求 X。

二、（12 分）已知齐次线性方程组(I)为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

另一个齐次线性方程组(II)的一个基础解系为 $\alpha_1=[2\quad -1\quad a+2\quad 1]^T$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-1&2&4&a+8\end{bmatrix}^T$。

(1) 求方程组(I)的一个基础解系；

(2) 当 a 为何值时，方程组(I)和(II)有非零公共解?当有非零公共解时，求出全部非零公共解。

三、（12 分）若 $AB=BA$，请证明 $rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)-rank(AB)$。

四、（12 分）已知 $M_{2\times2}(R)$ 是指实二阶矩阵构成的线性空间，其一组基为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},$$

在其上有一个线性变换$\varphi: M_{2\times2}(R)\mapsto M_{2\times2}(R)$，满足

$$\varphi(\alpha_1)=\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix},\varphi(\alpha_2)=\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix},\varphi(\alpha_3)=\begin{bmatrix}3&2\\8&1\end{bmatrix},\varphi(\alpha_4)=\begin{bmatrix}4&5\\13&-1\end{bmatrix}$$

(1) 求出φ在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$下的表示矩阵$A$

(2) 令$\ker\varphi=\{\alpha\in M_{2\times2}(R)\,|\,\varphi(\alpha)=0\}$，称$\ker\varphi$为$\varphi$的核，试求$\ker\varphi$。

五、（12 分）设 V 为 n 维线性空间，$\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\}$ 为 V 的一个基，且

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\eta_1+\eta_2+...+\eta_n\\
&\alpha_2=\eta_2+\eta_3+...+\eta_n\\
&...\\
&\alpha_n=\eta_n
\end{aligned}$$

(1) 证明 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ 为 V 的一个基；

(2) 求由基 $\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\}$ 到基 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ 的过渡矩阵；

(3) 设 a 在基 $\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\}$ 下的坐标为 $(a_1,a_2,...,a_n)$，求 a 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ 下的坐标。

六、（12 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}^n$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是行列式

$$\begin{vmatrix}<\alpha_1,\alpha_1> & <\alpha_1,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_1,\alpha_m>\\ <\alpha_2,\alpha_1> & <\alpha_2,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_2,\alpha_m>\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ <\alpha_m,\alpha_1> & <\alpha_m,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_m,\alpha_m>\end{vmatrix}\neq 0$$

（装订线内不要答题）

七、（14 分）设 A 为 n 阶方阵，B 为 m 阶方阵。证明：$\begin{bmatrix}A & \\ & B\end{bmatrix}$ 相似于一个对角矩阵当且仅当 A、B 分别相似于一个对角阵。

八、（14 分）设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 的矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 和 $\lambda_3=4$。

(1) 求参数 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准型，并写出所用的正交变换