线性代数期末复习

期末考试题型

倪卫明

复旦大学信息学院

2013, June

期末考试题型

(一) 是非题, 每小题2分, 共20分;
(二) 计算行列式;
(三) 计算题, 实对称矩阵正交相似于对角阵;
(四) 关于矩阵秩的证明题;
(五) 求极大线性无关组;
(六) 解线性方程组;
(七) 求两个子空间的和与交的基;
(八) 二次型;
(九) 线性变换、特征值、特征子空间;

考点: 熟悉行列式性质和技巧

(1) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(2) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$

考点:

(a) 求实对称阵的特征值与特征向量;

(b) 不同特征值对应的特征向量必正交;

(c) 当某特征值的重数大于1时, 将该特征值对应的特征向量同过Gram-Schmidt过程化为标准正交向量;

(d) 将标准正交向量按特征值排列顺序形成正交矩阵.

(3) 求 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 的一个正交相似变换, 将 $\mathbf{A}$ 化成对角形.

解: (a). 求 $\mathbf{A}$ 的特征值. $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$ 求得特征根为: $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=10$.

(b). 对 $\lambda_1=\lambda_2=1$,解 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$求得基础解系: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, 通过 Gram-Schmidt正交化过程得 $\mathbf{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$.

对于 $\lambda_3=10$, 解方程组后得单位化向量 $\mathbf{p}_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$.

(c). 最终得到正交矩阵 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$, 和 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=diag(1,1,10)$.

考点:矩阵秩的性质: 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为矩阵.

(a) $Rank(\mathbf{A}) = \min\left\{\mathbf{A}\text{的行数}, \mathbf{A}\text{的列数}\right\}$

(b) $k \neq 0$, $Rank\,(k\mathbf{A}) = Rank\,(\mathbf{A})$;

(c) $Rank\,(\mathbf{A}) = Rank\,\left(\mathbf{A}^T\right)$.

(d) 若 $Rank(\mathbf{A}) = r$, 则 $D_{r+1} = 0$(其中 D_{r+1} 表示 $r+1$ 阶子式).

(e) $Rank(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq Rank(\mathbf{A}) + Rank(\mathbf{B})$;

(f) $Rank(\mathbf{AB}) \leq \min\left\{Rank(\mathbf{A}), Rank(\mathbf{B})\right\}$;

(g) $Rank\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) = Rank\,(\mathbf{A}) + Rank\,(\mathbf{B})$;

(h) $Rank(\mathbf{PA}) = Rank(\mathbf{AQ}) = Rank(\mathbf{A})$, 其中 $\mathbf{P}$,$\mathbf{Q}$ 为可逆矩阵.

(i) 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则 $Rank(\mathbf{A}) + Rank(\mathbf{B}) \leq n$;

(j) 若 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 相似, 则 $Rank(\mathbf{A}) = Rank(\mathbf{B})$;

(k) $Rank(\mathbf{A}) - Rank(\mathbf{B}) \leq Rank(\mathbf{A}\pm\mathbf{B}) \leq Rank(\mathbf{A}) + Rank(\mathbf{B})$

(l) $Rank(\mathbf{A})+Rank(\mathbf{B})-n\leq Rank(\mathbf{AB})\leq\min\{Rank(\mathbf{A},Rank(\mathbf{B}\}$
(m) 若方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解, 则 $Rank(\mathbf{A})<\mathbf{A}$的列数;
(n) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $|\mathbf{A}|=0\iff Rank(\mathbf{A})<n$;

例: 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 证明

$$Rank(\mathbf{A}^*)=\begin{cases} n, & Rank(\mathbf{A})=n\\ 1, & Rank(\mathbf{A})=n-1\\ 0, & Rank(\mathbf{A})<n-1\end{cases}$$

解:若 $Rank(\mathbf{A})=n$, 则 $|\mathbf{A}|\neq 0\Rightarrow|\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^n\Rightarrow|\mathbf{A}^*|\neq 0$ 因而 $Rank(\mathbf{A}^*)=n$;
若 $Rank(\mathbf{A})=n-1$, 则 $|\mathbf{A}|=0\Rightarrow\mathbf{AA}^*=|\mathbf{A}|\,\mathbf{E}=\mathbf{0}$, 利用性质(i)有: $Rank(\mathbf{A})+Rank(\mathbf{A}^*)\leq n\Rightarrow Rank(\mathbf{A}^*)\leq 1$;
又因为 $Rank(\mathbf{A})=n-1\Rightarrow\mathbf{A}$ 存在 $n-1$ 阶非零子式$\Rightarrow\mathbf{A}^*\neq\mathbf{0}\Rightarrow Rank(\mathbf{A}^*)\geq 1$, 最后 $Rank(\mathbf{A}^*)=1$;
若 $Rank(\mathbf{A})<n-1$, 则 $\mathbf{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式全为零, 因而 $\mathbf{A}^*=\mathbf{0}$.

期末考试题型

五 求极大线性无关组
考点: 利用初等(行)变换将矩阵(向量组构成的矩阵)化为阶梯型, 再从其中确定极大线性无关的向量组;

六 解线性方程组
考点: 方程组的解结构, 包括齐次方程组解结构及基础解系; 非齐次方程组的解可表示为特解加相应齐次方程组的通解; 利用消元法(初等(行)变换求方程组的解;

考点: 子空间的和与交的概念, 以及求子空间的基;

设子空间 $S_I = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, 子空间 $S_{II} = L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$;

(a) 求交空间的基:

设 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ 是子空间 S_I 的一组基, $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_m}$ 是 S_{II} 的一组基. 令 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{i_1} & \cdots & \alpha_{i_k} & \beta_{i_1} & \cdots & \beta_{i_m} \end{bmatrix}$, 求下列方程组的解

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+m} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \tag{1}$$

显然, $\max\{k, m\} \leq Rank(\mathbf{A}) \leq (k+m)$

(1) $Rank(\mathbf{A}) \leq (k+m)$, $S_I \cap S_{II} = \{\mathbf{0}\}$.

(2) $\max\{k, m\} < Rank(\mathbf{A}) < (k+m)$, 方程组有非零解.

设 $\begin{bmatrix} y_1^* & \cdots & y_k^* & y_{k+1}^* & \cdots & y_{k+m}^* \end{bmatrix}^T$ 是一非零解, 令

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{bmatrix} \alpha_{i_1} & \cdots & \alpha_{i_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^* & \cdots & y_k^* \end{bmatrix}^T \\ &= -\begin{bmatrix} \beta_{i_1} & \cdots & \beta_{i_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k+1}^* & \cdots & y_{k+m}^* \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2}$$

(2) (续)
显然, η 是交空间的向量, 因而, 方程组(1) 的基解代入(2) 后得到的向量是交空间的基. 基解的数量等于 $\dim(S_I)+\dim(S_{II})-Rank\,(\mathbf{A})$, 其中 $Rank(\mathbf{A})=\dim(S_I+S_{II})$, 这恰与维数公式一致:

$$\dim(S_I)+\dim(S_{II})=\dim(S_I+S_{II})+\dim(S_I\cap S_{II})$$

(3) $Rank\,(\mathbf{A})=\max\{k,m\}$, 不妨设 $k\le m$, 说明子空间 $S_I\subseteq S_{II}$, 则 S_I 的基就是交空间的基;

(b) 求和空间的基:
求出向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 的极大线性无关组就是和空间的基;

期末考试题型

八 二次型

考点: 将二次型化为标准型, 验证实对称矩阵的正定性等;

九 线性变换、特征值、特征子空间

考点: 求线性变换对应矩阵的特征值、特征向量; 针对某个特征值 λ_i, 特征子空间 $V_{\lambda_i} = \{\lambda_i\text{对应特征向量的线性组合}\}$