

# 复旦大学计算机科学技术学院

## 2022~2023 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

时间 2023 年 1 月 3 号

课程名称: 集合与图论 课程代码: COMP130149.01

开课院系: 计算机科学技术学院 考试形式: 闭卷

姓名: 学号: 专业:

提示: 请同学们秉持诚实守信宗旨, 谨守考试纪律, 摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为, 学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

一、判断下列结论是否正确, 并说明理由 (正确的请证明, 错误的请举出反例)。  
(每小题 5 分, 其中判断正误 1 分, 说明理由 4 分; 共 20 分)

- (1) 设  $G_1, G_2$  均为平面图。若  $G_1 \cong G_2$ , 则  $G_1^* \cong G_2^*$ , 其中  $G_1^*, G_2^*$  分别为  $G_1, G_2$  的对偶图。
- (2) 无理数集的基数小于复数集的基数。
- (3) 设  $A$  为非空集合。 $A$  上等价关系的个数与划分的个数一样多。
- (4) 设  $k$  为正整数。任何  $k$  正则的二分图一定有完美匹配。

二、设  $G(V, E)$  为边带权连通图,  $T$  为  $G$  的最小生成树。如果在  $T$  中删去所有权值大于  $D$  的边后,  $T$  被分割成为  $S$  个连通分支, 则在图  $G$  中删去所有权值大于  $D$  的边后,  $G$  也被分割成为  $S$  个连通分支。(10 分)

三、设图  $G$  的边色数为  $k$ 。则在图  $G$  中一定存在一个正常  $k$  边着色, 使得染不同颜色的边数至多相差 1。即令  $E_i$  表示染第  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , 种颜色的边的集合, 则  $|E_i - E_j| \leq 1, 1 \leq i, j \leq k$ 。(12 分)

四、设  $N(V, E, c, s, t)$  为网络，其中  $c$  为容量函数。 $f$  为  $N$  的可行流， $(P, \bar{P})$  为  $N$  的一个割。试证明：(1)  $V_f \leq c(P, \bar{P})$ ；(2) 当  $V_f = c(P, \bar{P})$  时，则  $f$  为  $N$  的最大流， $(P, \bar{P})$  为  $N$  的最小割。 (12 分)

五、设  $G$  是非正则图，且是连通图。则  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ ，其中  $\chi(G)$  为  $G$  的点色数， $\Delta(G)$  为  $G$  的最大度数(要求直接证明，不能用 Brook 定理来证明，因为这是 Brook 定理特殊情形)。 (12 分)

六、证明：设  $G$  是 3 正则图，则  $\kappa(G) = \lambda(G)$ ，其中  $\kappa(G)$ 、 $\lambda(G)$  分别  $G$  为的点连通度与边连通度。 (10 分)

七、设  $(X, \leq)$  是一个偏序集，在  $X$  的一个子集中，如果每两个元素都是有关系的，则称这个子集是**链**；在  $X$  的一个子集中，如果每两个元素都是没有关系的，则称这个子集是**反链**。设  $r$  是  $X$  的最大链的基数，则  $X$  可以被划分成  $r$  个但不能再少的反链。(12 分)

八、用 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 进行排列来组成  $n$  位数，要求 0 必须出现一次，1 至多出现 1 次，2 出现 2 次或 3 次，3 出现奇数次，4 出现偶数次，5 与 6 出现的次数没有限制，求满足上述条件的  $n$  位数有多少个。 (12 分)