一. 判断正误

1. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$R=\{(1,2),(3,4),(5,4)\}$，则 R 是传递的。

√ 最严谨的证明思路：算出 $t(R)$，证得 $t(R)=R \Rightarrow R$ 传递

2. R、S 均为 A 上的等价关系，则 $R\cup S$ 也是 A 上的等价关系。

× 反例：$A=\{1,2,3\}$，$R=I_A\cup\{(1,2),(2,1)\}$，$S=I_A\cup\{(1,3),(3,1)\}$

则 $R\cup S=I_A\cup\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$，不传递

3. $A=\{2,3,4,5,12,18,10,24,25,30\}$，$(A,|)$，$\{2,3\}$ 的上确界为 12.

× 12 不整除 18，30

4. $|A|=n$，A 上反传递关系的个数是 $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

× ④ A 上的反对称关系有：$2^n\cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个

的子集　把 $(a_1,a_1),\dots,(a_n,a_n)$ 提出来，得 2^n

除去对角线元素后，剩下有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对：

即 $\{(a_1,a_2),(a_2,a_1)\},\{(a_1,a_3),(a_3,a_1)\},\dots,$

$\{(a_1,a_n),(a_n,a_1)\},\dots,\{(a_{n-1},a_n),(a_n,a_{n-1})\}$

每个 (a_i,a_j) 可取 0 或 1，同 1 对中，(a_i,a_j)

与 (a_j,a_i) 的取值乘积为 0

有 $\{0,0\},\{0,1\},\{1,0\}$ 三种取法，故是 $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

二. $|A|=6$，$|A|$ 上有 3 个等价类的关系的个数

有3个等价类：$1+1+4: C_6^4$　$1+2+3: C_6^1C_5^2$　$2+2+2: \frac{C_6^2C_4^2}{3!}$　相加：得90个。

三. (1) 证明可列个可列集之并是可列集。

$A_i\ (i=0,1,2,\dots)$ 为可列个可列集，令 $A_i=\{a_{i0},a_{i1},a_{i2},\dots\}$，将 $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ 按对角线法则编号

$\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ 中的每个元素均可编到且仅编号一次 $\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ 为可列集

(2) $|A|=5$，证明 $\overline{\overline{A\times A\times A\times\cdots\times A\times\cdots}}=\aleph$

$\aleph=\overline{\overline{(0,1)}}$ 作两个双射可证，令 $A=\{0,1,2,3,4\}$

★注意：$A\times A\times\cdots\times A\times\cdots\to(0,1)$，注意要说明 $(0,0,0,\ldots)$ 该点的映射要特别列出来

四. $A=\{x^{1905}\mid x\in N\}$，$B=\{x^{2021}\mid x\in N\}$，$C=A\cap B$，求 $|A|$，$|B|$，$|C|$.

解：A，B 均为 N 的无限子集，$\therefore |A|=|B|=\aleph_0$

★ $\underset{\text{无限}}{\{x^{1905\times2021}\mid x\in N\}}\subseteq C\subseteq N$ $\longrightarrow$ C 无限　　$\therefore C$ 也为 N 的无限子集

$\therefore |C|=\aleph_0$

• 直接说 $C=\{x^{1905\times2021}\mid x\in N\}$ 而不证明会被扣分

五. $(B,\preceq)$ 为偏序集，$B^A=\{f\mid f:A\to B\}$，在 B^A 上定义 R：$(f,g)\in R$ $\Leftrightarrow\forall x\in A$，$f(x)\preceq g(x)$.（这是偏序符号而不是≤符号）

(1) 证明 R 为 B^A 上的偏序关系。★一定要说明 $\preceq$ 是自反、反对称、传递的

• 需要用到 $(B,\preceq)$ 为偏序集来进行证明

(2) 说明 (B^A,R) 有最大元的充要条件，并简要描述

B 有最大元 b_{max}. 若 f 为 B^A 的最大元，则 $\forall a\in A$，$f(a)=b_{max}$

六. $\{1,2,3,4,5\}$，1 至多出现 2 次，2 出现偶数次，3 出现奇数次，4.5 无限制.

(1) ★用生成函数算出的 $a_n=4^{n-1}+n4^{n-2}+\frac{1}{2}n(n-1)4^{n-3}$ 是 $n\geq3$ 的情况.

$n=1,2$ 要特别说明：分别有 1、6 个。$(a_1=1,a_2=6)$

(2) 4 不出现在首位：a_n-a_{n-1} $(n\geq2)$　　若 $n=1$：1 个

七. $x_1+x_2+x_3=30$ ($4\le x_1\le 15, 5\le x_2\le 19, 6\le x_3\le 9$) 的非负整数解个数。

$x_1'+x_2'+x_3'=27$ ($0\le x_1'\le 11, 0\le x_2'\le 14, 0\le x_3'\le 3$)

① 容斥原理 (较复杂)　　② 生成函数

八. 3×7 个小方格组成的大方格，涂上红、黑两种颜色，证至少有一个非简单子矩形 (非 $1\times k$, $k\times 1$) 的四个角的颜色相同.