1. 图 $G=(V, E)$和 $G'=(V', E)$是同构的，如果存在一个从顶点集 V 到顶点集 V' 的双射函数 f，和一个从边集 E 到边集 E'的双射函数 g，使得 E中的边e与V中v_1, v_2相关联当且仅当$g(e)$与$f(v_1), f(v_2)$相关联，则称 G 和 G'是同构的。设 $G=(V, E)$和 $G'=(V', E')$是两个有向图，若存在双射 $\varnothing: V\to V'$以及双射 $\psi: E\to E'$，使得 对E中(u,v)，~~对于~~ $u,v\in V$ 有 $\psi((u,v))=(\varnothing(u),\varnothing(v))$，称 G 和 G'是同构的。

2. 在 2005 年 9 月复旦大学百年校庆的庆典日，有 4 对毕业于复旦大学计算机系的新婚夫妇在当时的复旦计算机楼——袁成瑛楼“仰止”太湖石前的草坪上举行集体婚礼。在婚礼结束时，这 4 对夫妇互相握手，彼此祝福新的家庭组成，因此，不会有自己和自己握手，也不会有夫妻间的握手，并且没有两个人握手超过一次。然后，一位新郎问其他 3 对夫妇和他的新婚妻子：他或她握了多少次手？这位新郎得到的答案都不相同。则这位新郎握了 ~~3~~ 2 次手。

$d=0\sim6$

3. 设树 T 有两个度数为 3 的顶点，3 个度数为 4 的顶点，1 个度数为 6 的顶点，则树 T 有 14 个树叶顶点。设树 T 有 n 个顶点，Δ是 T 的顶点最大度数，并且 n_i 是度数为 i 的顶点个数，$i=1, 2, \ldots, \Delta$。则树 T 有 $\sum_{i=1}^{\Delta} in_i - \sum_{i=1}^{\Delta} n_i + 2$ 个树叶顶点。

4. 35 条边，每个顶点的度数至少为 3 的图最多有 23 个顶点。

二、判断下列命题是否正确，并说明理由。（括号内写“是”或“否”）（28 分，每题 7 分，是非判断 2 分，证明或反例 5 分）

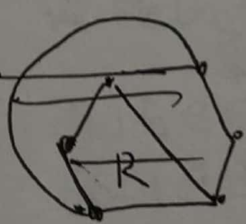
1 设 R 是图 G 的某个平面嵌入的一个内部面，则存在图 G 的一个平面嵌入使 R 为外部面。

（否）

反例

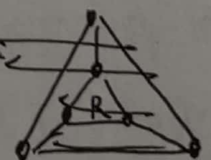
~~设G为有向的对偶图~~

图G:



~~则不存在G一个平面嵌入使R为外部面~~

反例 G':



~~不存在G的平面嵌入使R为外部面~~

-14

2　若 G 是简单连通图，边数为 e，顶点数为 n。若 $e\geq n$，则 G 至少有 3 棵生成树。

（是）

证明：

由于 G 是简单连通图且 $e > n-1$，故 G 中必然有环，且环的边数必大于等于3，~~不断移去G中的环路中去掉某边~~，

下面对 G 中的环路数为 k 进行归纳。

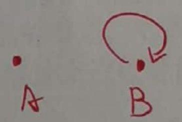
~~自至最后~~

① 若 G 中仅有一个环路 C，则去掉 C 中任一边都形成不同的生成树，由树是"最大无回路图"，故至少有3棵生成树

② 若 G 中环路数为 k 时结论成立，则 $k+1$ 个回路时，任选一回路，去掉一条边，则图中仅剩 k 个回路，剩余图至少有3棵生成树，故原图亦然。

3　一个有向图 G 中仅有一个顶点的入度为 0，其余顶点的入度均为 1，则 G 是有根树。

（~~是~~）是



~~反例~~

~~若G不连通~~

证明：即证在不考虑边的方向时，G 为一棵树

任取两点 $u,v\in G'$，其中 G' 为不考虑边方向时的图 G

① 若 u,v 中有一点入度为0的结点，假设为 u

则由于~~其对应的结点~~除 u 以外所有结点对应入度为1，故由 v 必可以构造一条路径到达 u，只需沿着首先入边的反向回溯即可，故 u,v 连通

② 若 u,v 均对应入度为1的结点，由①设对应入度为0结点为 s。

则 u 与 s 连通，v 与 s 连通，故 u 与 v 连通

由 u,v 任意性，G' 连通图。

~~故由有向树定~~ 设 ~~G中顶点数为n，则有~~ 设 G 中顶点数为 n，则

顶点入度总和为 $n-1$，故顶点出度总和亦为 $n-1$，故对应 G' 中度数总和 $=2(n-1)$

由握手定理，G' 边数为 $n-1$，G' 为树，故不考虑方向时 G 为树，由有根树定义……

4　设 C 是简单连通图 G 的回路，若删去 C 中任一边后所得到的路 C' 为 G 中的最长路，则 C 是图 G 的哈密顿回路。
（是）

证明：反证法

若 C 不是哈密顿路，则其不包含 G 中所有顶点，设 u 顶点不在回路 C 中，设 ~~u(u,v)∈~~ C u 与 v 关联，v 在回路 C 中，v 在回路 C 中与 w 关联，

则去掉 (v,w) 后，C' 并非最长路 因为 $C' \cup \{(u,v)\}$ 长于 C'

三、综合题（42 分；第 1 题，11 分；第 2 题，11 分；第 3 题，10 分；第 4 题，10 分）

1．生成一个带权连通图的最小生成树的 Prim 算法如下：
假设 $G(V, E)$ 是带权连通图，TE 是 G 上最小生成树中边的集合。
设 $U=\{u_0\}$（$u_0 \in V$），$TE=\{\}$；
重复执行下述操作：
在所有 $u \in U$，$v \in V-U$ 的边 $\{u, v\} \in E$ 中找一条权值最小的边 $\{u_0, v_0\}$ 并入集合 TE，
同时 v_0 并入 U，直至 $U=V$ 为止。
此时 TE 中必有 n-1 条边，则 $T(V, TE)$ 为 G 的最小生成树。
请证明 Prim 算法的正确性。

证明：先证 TE 为 G 的生成树：

由构造过程，每向 TE 中加入一条边，U 的元素个数就加 1，当 $|U|=|V|$ 时，正好执行该算法 $n-1$ 次，TE 中有 $|V|-1$ 条边，且每一次选取的点，都与已构造成的 U 中某点连通，故 TE 为连通图，则 TE 为生成树

再证 TE 为 G 的最小生成树：

设 G 的最小生成树为 T^*，则任取一边 $e \in TE$ 且 $e \notin T^*$

某棵

集

删去 e 后将 TE 分为两个连通域，设两个连通域顶点集 V_1 V_2

由构造过程，e 必为 $E(V_1,V_2)$ 中最小权值边。另一方面，T^* 中也必有且仅有一边在 $E(V_1,V_2)$ 中，设为 e^*，设 $T^{(1)}=TE-\{e\}+\{e^*\}$

则 $W(T^{(1)}) \geq W(TE)$，重复上述步骤可将 TE 逐步替换为 T^*，且 $W(T^*) \geq W(TE)$，故 TE 为最小生成树。

余

2. 通过节点的黑白着色，判定图 G 是否为二分图的算法如下：

首先，给出两种颜色：黑和白；并在图 G 中，任取一个节点，对该节点用一种颜色着色；

从当前被着色的节点出发，对相邻节点进行节点着色。和当前被着色的节点相邻的节点有三种情况：

- 情况 1：如果相邻节点未被着色，那么用另一种颜色对该节点着色；
- 情况 2：如果相邻节点已经被着色，并且和当前节点的颜色不同，则略过该点；
- 情况 3：如果相邻节点已经被着色，但是，和当前节点的颜色相同，则返回图 G 不是二分图的信息，并结束算法过程。

对于当前被着色节点的相邻节点的搜索，可以采用 DFS、BFS。

如果黑白着色过程结束，在图 G 中还有节点未被着色，则图 G 不是连通图；在图 G 中，任取一个未被着色的节点，对该节点进行着色，并重复上述的节点着色过程，对该节点所在的连通分支进行着色。

请证明算法的正确性。

证明：~~反证法~~，~~若G~~ 不妨设图G连通，否则考虑G的连通分支

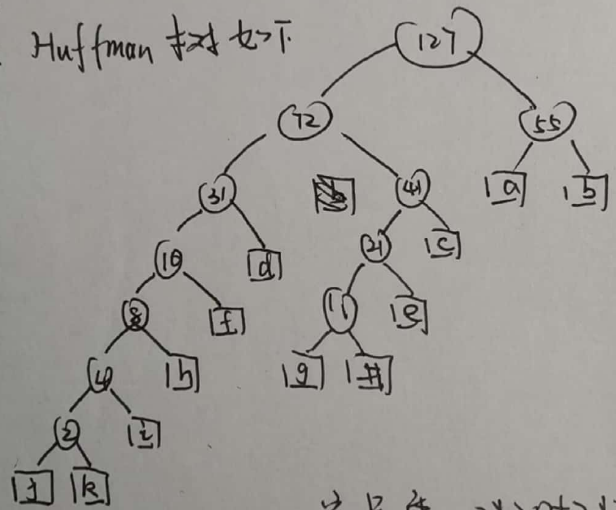
~~若对于情况3~~ 若图G是二分图，设二划分为 V_1, V_2.

~~若~~

任取节点v，不失一般性，设 $v \in V_1$，着色A，则每一次取相邻节点 v_1，都有 $v_1 \in V_2$，着色B，对 v_1 进行上述操作时同理，最终必使得 V_1 中点着色A而 V_2 中点着色B. 由于 V_1 内的节点不相邻，故不可能出现情况3。反之，若出现情况三，则必有G不是二分图。

3．有一段要发送的报文，它包含下列字符：30 个 a、25 个 b、20 个 c、15 个 d、10 个 e、8 个 f、6 个 g、4 个 h、2 个 i、1 个 j、1 个 k、5 个#。现对这段报文进行编码，设计一个二元前缀码，使编码后报文的总长度最小。请写出每个字符的二元前缀码，并求出编码后报文的总长度。（前缀码 6 分，编码后报文的总长度 4 分）

解：Huffman 树如下



a: 10
b: 11
c: 011
d: 001
e: 0101
f: 0001
g: 01000
h: 00001
i: 000001
j: 0000000
k: 0000001
#: 01001

总长度：$2\times30+2\times25+3\times20+3\times15+4\times10+4\times8+6\times5+4\times5+2\times6+1\times7+1\times7+5\times15$

$=388$

4. 给出两个整数 r 和 n，且不都是奇数，$0\le r\le n-1$，那么一定存在 n 个顶点的 r-正则图。

~~解~~ 证明：构造性证明

①若 n 为偶数，r 为奇数

设 n 个顶点为 $(v_0, v_1, v_2 \cdots v_{n-1})$

首先将 v_i 与 v_{i+1} 相连 $(0\le i<n-1)$，并将 v_{n-1} 与 v_0 相连，各点度数均为2

再将 v_i 与 $v_{i+\frac{n}{2}}$，$v_{i+\frac{n}{2}-1}$，$v_{i+\frac{n}{2}+1}$，$v_{i+\frac{n}{2}-2}$，$v_{i+\frac{n}{2}+2}$ $\cdots$ $v_{i+\frac{n}{2}-\frac{r-3}{2}}$，$v_{i+\frac{n}{2}+\frac{r-3}{2}}$

相连 $(0\le i\le \frac{n}{2})$，即构造出 n 阶的 r-正则图

以 $n=8$，$r=3$ 为例：

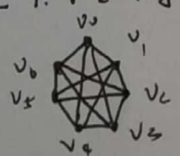
②若 n 为奇数，r 为偶数

同①，同样将 v_i 与 v_{i+1} $(0\le i<n-1)$ 相连、v_{n-1} 与 v_0 相连，各边度数均为2

再将 v_i 与 $v_{i+\frac{n+1}{2}}$，$v_{i+\frac{n-1}{2}}$，$v_{i+\frac{n+1}{2}+1}$，$v_{i+\frac{n-1}{2}-1}$，$\cdots$ $v_{i+\frac{n+1}{2}+\frac{r-2}{2}}$，$v_{i+\frac{n-1}{2}-\frac{r-2}{2}}$

相连 $(0\le i\le \frac{n-1}{2})$

以 $n=7$，$r=4$ 为例



③ n 为偶数，r 为偶数时

与①同样连接 v_i 与 v_{i+1} $(0\le i<n-1)$，v_{n-1} 与 v_0，各边度数为2

~~再连接 v_i 与 v_{i+2}，v_{i+1} 与 v_{i+4} $\cdots$ v_{n-2} 与~~ v_0，

~~v_i 与 v_{i+2}，$(i=0,2,\cdots n-4)$，v_{n-2} 与~~ v_0.

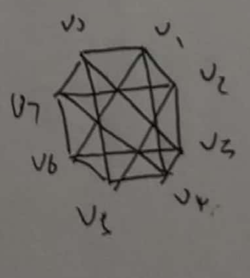
连接 ~~v_i 与 v_{i+2} $(i=1,3,\cdots n-3)$，v_{n-1}~~ 与 v_1

以 ~~$n=8$，$r=4$~~ 为例

连接 v_i 与 $v_{i+\frac{n}{2}-1}$，$v_{i+\frac{n}{2}+1}$，$v_{i+\frac{n}{2}-2}$，$v_{i+\frac{n}{2}+2}$ $\cdots$ $v_{i+\frac{n}{2}+\frac{r-2}{2}}$，$v_{i+\frac{n}{2}-\frac{r-2}{2}}$

$(0\le i\le \frac{n}{2})$

以 $n=8$，$r=4$ 为例：



扫描全能王 创建