

《集合论与图论》课堂练习 1

(2022 年 10 月 20 日 13:30-15:10 复旦大学 计算机科学技术学院)

学号_____姓名_____成绩_____

一、 填空题 (30 分, 每格 3 分)

1. 设 R_1 是从 A 到 B 的二元关系, R_2 是从 B 到 C 的二元关系, 则从 A 到 C 的 R_1 和 R_2 的复合关系定义为_____。

设 f_1 是从 A 到 B 的函数, f_2 是从 B 到 C 的函数, 则从 A 到 C 的 f_1 和 f_2 的复合函数定义为_____。

2. 设 $(A, \leq)$ 是一个偏序集合, $B \subseteq A$ 。则如果存在一个元素 $b \in B$, _____ 则称 b 是 B 的最大元;
如果 _____, 则称 b 是 B 的极小元。如果存在一个元素 $a \in A$, _____ 则称 a 是 B 的上界; 如果 $a \in A$ 是 B 的下界, _____ 则称 a 为 B 的下确界(或称最大下界)。

3. 集合 A 的递归(归纳)定义由三部分组成:

- (1) _____
- (2) _____
- (3) _____

4. 设 A, B 是任意两个集合, _____ 则称 A 和 B 对等(或等势), 记为 $A \sim B$; 或称 A 和 B 的基数相同。



二、是非判断题 (24 分, 每题 6 分, 其中判断 3 分, 论述 3 分)

1. 设 $A=\{2, 3, 4, 5, 12, 18, 10, 24, 25, 30\}$, $(A, |)$ 为偏序集, 其中 $|$ 为 A 上的整除关系。则 $\{2, 3\}$ 的上确界为 12。

()

2. R 是 A 上的关系, 则 $R=R^2$ 的充要条件是 $R=I_A$ 。

()

3. 设 A 是一个集合, R 是 A 的幂集 $P(A)$ 上的二元关系, 对所有 $S, T \in P(A)$, $(S, T) \in R$ 当且仅当 $|S| \leq |T|$, 则 R 是偏序关系。

()



4. 对于任意集合 A 和 B , $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$.
()

三、综合题 (46 分)

1. 设 $(X, \leq)$ 是一个偏序集, 在 X 的一个子集中, 如果每两个元素都是有关系的, 则称这个子集是链; 在 X 的一个子集中, 如果每两个元素都是没有关系的, 则称这个子集是反链。设 r 是 X 的最大链的基数, 则 X 可以被划分成 r 个但不能再少的反链。(16 分)
证明:



2. 设函数 $f: A \rightarrow B$, 并定义 $g: B \rightarrow P(A)$, 对于 $b \in B$, $g(b) = \{x \mid x \in A, f(x) = b\}$ 。

(1) 证明: 如果 f 是 A 到 B 的满射, 则 g 是内射的;

(2) (1) 的逆命题成立吗?

(16 分, (1) 10 分, (2) 6 分)

3. 某一个市镇只有一家旅馆: Hilbert 旅馆, 这个旅馆与通常旅馆没有不同, 只是房间数不是有限而是无穷多间, 房间号码为 $1, 2, 3, 4, \dots$ 。这个旅馆的房间可排成一列的无穷集合 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, 称为可列集。

有一天, 所有房间都住满了。后来来了一位客人, 坚持要住房间。旅馆老板于是引用“旅馆公理”说: “满了就是满了, 非常对不起!”。正好这时候, 聪明的旅馆老板的女儿来了, 她看见客人和她爸爸都很着急, 就说: “这好办, 请每位顾客都搬一下, 从这间房搬到



下一间”。于是 1 号房间的客人搬到 2 号房间，2 号房间的客人搬到 3 号房间……依此类推。最后 1 号房间空出来，请这位迟到的客人住下了。

第二天，Hilbert 旅馆又来了一个庞大的代表团要求住旅馆，他们声称有可数无穷多位代表一定要住，这又把旅馆经理难住了。老板的女儿再一次来解围，她说：“您让 1 号房间客人搬到 2 号，2 号房间客人搬到 4 号……， k 号房间客人搬到 $2k$ 号，这样，1 号，3 号，5 号，……房间就都空出来了，代表团的代表都能住下了。”

第三天，这个代表团每位代表又出新花招，他们想每个人占可数无穷多间房来安排他们的亲戚朋友，这回不仅把老板难住了，连老板的女儿也被难住了。

(1) 现在您担任 Hilbert 旅馆的客房经理，您准备采取什么方法解决当前的住宿问题？

(2) 后来老板的女儿进了大学数学系。有一天，Cantor 教授来上课，他问老板的女儿：“要是区间 $[0, 1]$ 上每一点都占一个房间，是不是还能安排？”也请您回答 Cantor 教授的这一问题，并论证。

(14 分，两小题各 7 分)

