Final

Collated by Undefined

Date: 10/1/2022 Time: 8:30 $\sim$ 10:50

Problems

1 对称矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$，证明: $\operatorname{tr}(\boldsymbol{ABAB}) \le \operatorname{tr}(\boldsymbol{AABB})$.

2 设 n 是正整数, 矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 有相同的特征多项式，有相同的极小多项式，且 $\forall \mu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{rank}(\mu \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\mu \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是同阶单位矩阵. 问 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是否一定相似？如果是请证明，否则请给出反例.

3 设 n 是正整数, 向量 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 且满足 $x^*x = 1, x^*y = 0$, $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵，证明:
$\|\boldsymbol{I} - (x+y)\,x^*\|_2 = \|x+y\|_2$.

4 设 $n \in \mathbb{N}^*$, n 阶正规矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 证明: $\boldsymbol{AB}$ 是正规矩阵.

5 正整数 m, n 满足 $0 < m < n$, 分块矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}$ 是Hermite正定矩阵，其中
$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}_{11} \in \mathbb{C}^{m\times m}$. 设 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$.
证明: (i) $\boldsymbol{S}$是正定矩阵; (ii) $\|\boldsymbol{S}\|_2\|\boldsymbol{S}^{-1}\|_2 \le \|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2$.

6 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 凸集 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, 且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. 取 $x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \in \Omega_2, \alpha \in [1, +\infty)$, 集合 $\Omega_3 = \{y + \alpha(x_2 - x_1) \,|\, y \in \Omega_2\}$, 证明:
(i) Ω_3 是凸集; (ii) $\Omega_1 \cap \Omega_3 = \emptyset$.

7 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\forall t \in \mathbb{C}$, 有 $\exp(t\boldsymbol{A}) = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{bmatrix}$.

请给出一个这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$，或者证明为什么这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在.

8 设 n 是正整数, 矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的所有元素非负，其 (i,j) 元素为 a_{ij},
证明: 对任何 n 维正向量 x, 有

$$\min_{1\le i\le n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \le \rho(\boldsymbol{A}) \le \max_{1\le i\le n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Answer

1

Proof. 注意到 $(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{BA}$, 令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{n\times n}$,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2) = \|\boldsymbol{C}\|_2^2 - \sum_{i,j} c_{ij}c_{ji} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(c_{ij}-c_{ji})^2 \geq 0;$$

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABAB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2) \leq \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BAAB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{AABB})$.
即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABAB}) \leq \mathrm{tr}(\boldsymbol{AABB})$, 证毕. □

2 Solution $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 不一定相似. 作 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 如下:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 特征多项式均为 $(\lambda-1)^8$, 极小多项式均为 $(\lambda-1)^4$,
当 $\mu \neq 2$ 时，$\mathrm{rank}(\mu\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\mu\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = 8$,
当 $\mu = 2$ 时，$\mathrm{rank}(\mu\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\mu\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = 5$.
但 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是不相似的 Jordan 标准型.

3

Proof. 令 $\boldsymbol{P} = (x+y)x^*$, $\boldsymbol{P}^2 = (x+y)x^*(x+y)x^* = (x+y)x^* = \boldsymbol{P}$,
即 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$, 且 $\boldsymbol{P}$ 的有一个特征值为 $x^*(x+y) = 1$, 其余特征值均为 0.
$\forall\, x \in \mathbb{C}^n, x = \boldsymbol{P}x + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})x$, $\boldsymbol{P}x \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$, $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})x \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{P})$,
设 $y \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{P}) \cap \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$, $y = \boldsymbol{P}y + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})y = 0$,
因此 $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{P}) \oplus \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$.
$\forall\, x \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$, 设 $x = u + v$, $u \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{P})$, $v \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$,

$$\text{构造 } z = \|v\|_2\frac{u}{\|u\|_2} + \|u\|\frac{v}{\|v\|_2}, \text{ 有} \frac{\|\boldsymbol{P}x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})z\|_2}{\|z\|_2} = \frac{\|u\|_2}{\|u+v\|_2}.$$

$$\text{由上述对应关系知 } \max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{P}x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{z\neq 0}\frac{\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})z\|_2}{\|z\|_2}, \ \|\boldsymbol{P}\|_2 = \|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}\|_2.$$

$$\text{又 } \boldsymbol{P} \text{ 的奇异值分解为 } \|x+y\|_2 \cdot \frac{x+y}{\|x+y\|_2}x^*, \text{ 故 } \|\boldsymbol{P}\|_2 = \|x=y\|_2.$$

从而 $\|\boldsymbol{I} - (x+y)\,x^*\|_2 = \|x+y\|_2$, 证毕. □

4

Proof. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，设 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征子空间为 $\mathcal{V}_{\lambda_0}$，
$\forall x\in\mathcal{V}_{\lambda_0},\boldsymbol{AB}x=\boldsymbol{BA}x=\lambda_0\boldsymbol{B}x$, 故 $\boldsymbol{B}x\in\mathcal{V}_{\lambda_0}$, 即 $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的不变子空间. 将 $\boldsymbol{B}$ 对应的线性变换 φ 限制在 $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ 上得 $\varphi|_{\mathcal{V}_{\lambda_0}}$, 其在 $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ 上至少存在一个特征值 μ_0 和一个特征向量 v, 因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 至少存在一个公共特征向量 v.
取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的一个公共特征向量 q_1 ($\|q_1\|_2=1$), 并将其扩展为全空间上一组标准正交基，记作酉矩阵 $\boldsymbol{Q}_1=[q_1,\tilde{q}_2,\cdots,\tilde{q}_n]$.

$$\boldsymbol{Q}_1^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \alpha^*\\ 0 & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Q}_1^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\overline{\lambda}_1 & 0\\ \alpha & \boldsymbol{A}_1^*\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵，知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$,

$$\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2 & \overline{\lambda}_1\alpha^*\\ \alpha\lambda_1 & \boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{A}_1+\alpha\alpha^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2+\alpha^*\alpha & \alpha^*\boldsymbol{A}_1^*\\ \boldsymbol{A}_1\alpha & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^*\end{bmatrix}$$

比较可知 $\alpha=0$, $\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^*$, $\boldsymbol{Q}_1^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}$.
同理 $\boldsymbol{Q}_1^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}$, 且 $\boldsymbol{B}_1$ 是正规矩阵，$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1$.

对 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$ 继续进行上述操作，最后可以找到酉矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{n-1}$ 满足
$\boldsymbol{Q}_{n-1}^*\cdots\boldsymbol{Q}_1^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_{n-1}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}=\boldsymbol{\Lambda}$,
$\boldsymbol{Q}_{n-1}^*\cdots\boldsymbol{Q}_1^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_{n-1}=\mathrm{diag}\{\mu_1,\cdots,\mu_n\}=\boldsymbol{M}$.
令酉阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_{n-1}$, 有 $\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{AB}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda M}$，故 $\boldsymbol{AB}$ 可酉对角化，
因此 $\boldsymbol{AB}$ 是正规矩阵, 证毕. □

5

Proof. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作分块合同变换:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & 0\\ 0 & \boldsymbol{S}\end{bmatrix},$$

正定矩阵的任意主子阵正定，且合同变换不改变正定性，可知 $\boldsymbol{A}_{11}$, $\boldsymbol{A}_{22}$, $\boldsymbol{S}$ 均为正定矩阵. 同时 $\boldsymbol{A}_{11}^{-1}$ 也是正定矩阵，$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 是半正定矩阵.
用 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 表示一个矩阵按升序排列的特征值.

$$\lambda_{n-m}(\boldsymbol{S})=\max_{\|x\|_2=1}x^*(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})\,x\le\max_{\|x\|_2=1}x^*\boldsymbol{A}_{22}\,x=\lambda_{n-m}(\boldsymbol{A}_{22});$$

再由Cauchy交错定理得 $\|\boldsymbol{S}\|_2=\lambda_{n-m}(\boldsymbol{S})\le\lambda_{n-m}(\boldsymbol{A}_{22})\le\lambda_n(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$.

令 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$, 有 $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{S}$.

$\forall\, x\in\mathbb{C}^{n-m}$, 有 $\boldsymbol{X}x=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\,x\\ x\end{bmatrix}$, 即 $\|\boldsymbol{X}x\|_2\geq\|x\|_2$.

又知 $\dfrac{y^*\boldsymbol{A}y}{y^*y}$ 在 $\mathrm{Range}(\boldsymbol{X})\backslash\{0\}$上的局部最小值不小于 $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$上的全局最小值.

故 $\lambda_1(\boldsymbol{S})=\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{x^*\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}x}{x^*x}\geq\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{(\boldsymbol{X}x)^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}x}{(\boldsymbol{X}x)^*\boldsymbol{X}x}\geq\min\limits_{y\neq 0}\dfrac{y^*\boldsymbol{A}y}{y^*y}=\lambda_1(\boldsymbol{A})$,

$\|\boldsymbol{S}^{-1}\|_2=\dfrac{1}{\lambda_1(\boldsymbol{S})}\leq\dfrac{1}{\lambda_1(\boldsymbol{A})}=\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2$.

故 $\|\boldsymbol{S}\|_2\|\boldsymbol{S}^{-1}\|_2\leq\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2$, 证毕. □

6

Proof. Ω_1, Ω_2 是凸集，$\Omega_3 = \{y + \alpha(x_2 - x_1) \,|\, y \in \Omega_2\}$, 则
$\forall\, z_1, z_2 \in \Omega_3,\ \exists\, y_1, y_2 \in \Omega_2\ \ \text{s.t.}\ \ z_1 = y_1 + \alpha(x_2 - x_1),\ z_2 = y_2 + \alpha(x_2 - x_1);$
$\forall\, \theta \in [0,1],\ \ \theta z_1 + (1-\theta) z_2 = \theta y_1 + (1-\theta) y_2 + \alpha(x_2 - x_1)$, 由于 Ω_2 是凸集，故 $\theta y_1 + (1-\theta) y_2 \in \Omega_2$,
$\theta z_1 + (1-\theta) z_2 \in \Omega_3$. 因此 Ω_3 是凸集.
由凸集分离定理，$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, 故存在 $w \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \gamma \in \mathbb{R}$, 使得
$\forall\, u \in \Omega_1, v \in \Omega_2, w^\top u \le \gamma \le w^\top v.$
$\forall\, z \in \Omega_3$, 令 $\Omega_2 \ni v = z - \alpha(x_2 - x_1)$,
$w^\top z = w^\top v + \alpha w^\top (x_2 - x_1) \ge \gamma + \alpha w^\top (x_2 - x_1) \ge \gamma;$
设 Ω_1, Ω_3 存在公共元素 z_*, 可知 $w^\top z_* = \gamma$,
z_* 落在超平面 $H = \{x \in \mathbb{R}^n | w^\top x = \gamma\}$上，且 $v_* = z_* - \alpha(x_2 - x_1) \in \Omega_2$;

$$\text{作}\ s = \frac{1}{1+\alpha} v_* + \frac{\alpha}{1+\alpha} x_2,\ s \in \Omega_2,\ \text{但同时}\ s = \frac{1}{1+\alpha} z_* + \frac{\alpha}{1+\alpha} x_1,\ s \in \Omega_1,$$

与 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ 矛盾, 故 Ω_1, Ω_3 在超平面 H 上无公共元素.
又 $\forall\, u \in \Omega_1, z \in \Omega_3, w^\top u \le \gamma \le w^\top z$, 故 $\Omega_1 \cap \Omega_3 = \emptyset$, 证毕. □

7 Solution. 首先设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 则

$$\exp(t\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1} & \\ & \mathrm{e}^{t\lambda_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}, \text{为将幂因子提出, 只能}\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

此时有 $\exp(t\boldsymbol{A}) = \mathrm{e}^{t\lambda_1}\boldsymbol{I}$, 矛盾, 因此 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},\ t\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t\lambda & 1 \\ 0 & t\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/t & -1/t \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

$$\exp(t\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda} & \mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/t & -1/t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\text{为将幂因子提出，只能}\ \lambda = 1,\ \text{从而}\ \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{bmatrix};$$

解得一个 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

因此存在满足题意的 $\boldsymbol{A}$, 例如 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

8

Proof. 设 $r = \min_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$;

$$\text{作矩阵}\ \boldsymbol{B},\ \text{其}\ (i,j)\ \text{元素}\ b_{ij} = \frac{r a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{ik}},\ \text{知}\ \boldsymbol{B}\ \text{也是非负矩阵且}\ \boldsymbol{B} \le \boldsymbol{A}:$$

进一步有 $\boldsymbol{B}^k \leq \boldsymbol{A}^k$, $\|\boldsymbol{B}^k\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}^k\|_\infty$ $(k \in \mathbb{N})$, 由 Gelfand 谱半径公式,

$$\rho(\boldsymbol{B}) = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{B}^k\|_\infty^{1/k} \leq \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{A}^k\|_\infty^{1/k} = \rho(\boldsymbol{A});$$

r 既是 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值，也是 $\boldsymbol{B}$ 的行和范数, 故 $r \leq \rho(\boldsymbol{B}) \leq \|\boldsymbol{B}\|_\infty \leq r$,
从而 $\rho(\boldsymbol{A}) \geq \rho(\boldsymbol{B}) = r = \min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$;
由 Gershgorin 第一圆盘定理，$\rho(\boldsymbol{A}) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$;
故 $\min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(\boldsymbol{A}) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$;

对任意 n 维正向量，设其第 i 分量为 x_i $(x_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n)$,
作 $\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 再作 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 知 $\boldsymbol{C}$ 仍为非负矩阵.
其 (i, j) 元素 $c_{ij} = x_i^{-1} a_{ij} x_j$, 对 $\boldsymbol{C}$ 使用上述结论即得

$$\min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \rho(\boldsymbol{C}) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j;$$

注意到 $\rho(\boldsymbol{C}) = \rho(\boldsymbol{A})$, 因此

$$\min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \rho(\boldsymbol{A}) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j;$$

证毕. $\square$